المركز الوطني لتطوير المناهج والتقويم
National Center for Curriculum Development and Evaluation

المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الصف الحادي عشر - المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الأول

كتاب الطالب

11

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

هبه ماهر التميمي   يوسف سليمان جرادات   أ.د محمد صبح صبابحة

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج والتقويم

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج والتقويم استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237   06-5376266   P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor   feedback@nccd.gov.jo   www.nccd.gov.jo

قـرّرت وزارة التربيـة والتعليـم تدريـس هذا الكتـاب في مدارس المملكـة الأردنية الهاشـمية جميعها، بنـاءً على قـرار المجلس الأعلى للمركـز الوطنـي لتطويـر المناهـج والتقويـم في جلسـته رقـم (2024/4)، تاريـخ 2024/6/6 م، وقـرار مجلـس التربيـة والتعليـم رقـم (2024/64) تاريـخ 2024/6/26 م بـدءًا مـن العـام الـدراسي 2024 / 2025 م.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development and Evaluation. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development and Evaluation. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 791 - 1

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2025/1/375)

بيانات الفهرسة الأولية للكتاب:

عنوان الكتاب	الرياضيات، كتاب الطالب: الصف الحادي عشر المسار الأكاديمي، الفصل الدراسي الأول.
إعداد/ هيئة	الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج والتقويم
بيانات النشر	عمّان: المركز الوطني لتطوير المناهج والتقويم، 2025
رقم التصنيف	373.19
الواصفات	/ تدريس الرياضيات/ / أساليب التدريس/ / المناهج/ / التعليم الثانوي/
الطبعة	الطبعة الثانية، مزيدة ومنقحة

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

التحكيم التربوي:
أ.د. خالد أبو اللوم

التصميم الجرافيكي:
راكان محمد السعدي

التحرير اللغوي:
نضال أحمد موسى
ميسرة عبد الحليم صويص

British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

الطبعة الأولى (التجريبية) 1445 هـ / 2024 م

أعيدت طباعته 2025 – 2026 م

المقدّمة

الحمد لله ربّ العالمين، والصلاة والسلام على أشـــرف الأنبياء والمرســـلين، وبعد؛ فانطلاقًا من إيمان المملكة الأردنية الهاشــمية الراسخ بأهمية تنمية قدرات الإنســان الأردني، وتسليحه بالعلم والمعرفة؛ سعى المركز الوطني لتطوير المناهج والتقويم، بالتعــاون مع وزارة التربية والتعليم، إلى تحديث المناهج الدراســية وتطويرها، لتكون معينًا للطلبة على الارتقاء بمســتواهم المعرفي والمهاريّ، ومجــاراة الأقران في الدول المتقدمة. ولمّا كان مبحث الرياضيات من أهم المباحث الدراســية التي تنمّي لدى الطلبة مهارات التفكير وحَلِّ المشكلات، فقد أَوْلى المركز مناهجه عنايةً كبيرةً وأعدها وفق أفضل الطرائق المُتَّبَعة عالميًّا على أيدي خبرات أردنيّة؛ لضمان انسجامها مع القيم الوطنية الراسخة، وتلبيتها لحاجات الطلبة.

وقد روعي فــي إعداد كتب الرياضيــات للمرحلة الثانويــة تضمينها الموضوعات الرياضيــة الأكثر أهمية واســتخدامًا في التطبيقات العلمية المختلفة؛ بُغية إعداد الطلبة للدراســة الجامعيّة إعدادًا جيّدًا يتواءم مع مناهج الدول المتقدمة. كما حُرِص على تقديم هذه الموضوعات بطريقة بنائيّة متدرجة تتيح للطلبة فرصة تعلمها بعمق من دون عناء أو جهد كبيرين.

كما روعي تقديم الموضوعات بطريقة منظمة جاذبة ومدعمة بتمثيلات بيانية ومزوّدة بإرشادات تعين الطلبة على مواصلة تعلمهم بسلاسة من دون تعثر؛ فهي تذكرهم بالخبرات التعليميّة التي امتلكوها سابقًا وتساعدهم على ربط الموضوعات الجديدة ببعضها ربطًا وثيقًا. إضافة إلى صلة كثير من أمثلتها ومسائلها بسياقات حياتيّة تحفِّز الطلبة على تعلّم الرياضيّات بشغف وتجعله ذا معنى.

ولأنَّ كثرة تدرُّب الطلبة على حَلِّ المسائل نهجٌ ناجعٌ في ترسيخ المفاهيم الرياضية لديهم وتعزيز طلاقتهم الإجرائيّــة فقد تضمّن كتابا الطالب والتمارين عددًا كافيًــا من التدريبات؛ بهدف توثيق علاقة الطلبة بالكتاب المدرسيّ بصفته مرجعًا موثوقًا ورصينًا يغنيهم عن البحث عن أيّة مراجع أو مصادر إضافيّة، ويحقّق العدالة في التعلّم.

ونحــن إذ نُقدِّم هذا الكتاب، نؤمّل أن ينال إعجاب طلبتنا والكوادر التعليمية، ويجعل تعليم الرياضيات وتعلُّمها أكثر متعةً وسهولةً، ونَعِدُ بأنْ نستمرَّ في تطويره في ضوء ما يصلنا من ملاحظات سديدة.

المركز الوطني لتطوير المناهج والتقويم

قائمة المحتويات

قائمة المحتويات

الوحدة 1

الاقترانات والمقادير الجبرية
Functions and Algebraic Expressions

ما أهمية هذه الوحدة؟

تُعدّ الاقترانات من المفاهيم الرياضية المهمة التي تُستخدم في تمثيل العلاقات بين الكميات المختلفة في حياتنا اليومية، خاصةً عندما تتغيّر هذه العلاقات باختلاف القيم أو الحالات كما في الاقترانات المتشعبة. ومن أبرز تطبيقاتها الواقعية حساب فاتورة الكهرباء التي تعتمد على نظام الشرائح، إذ يتغيّر سعر الاستهلاك تبعًا لكمية الطاقة المستخدمة.

تعلّمت سابقًا:

- اقترانات كثيرات الحدود، والاقترانات النسبية، وبعض خواصّ كلّ منها.
- تمثيل اقترانات كثيرات الحدود والاقترانات النسبية بيانيًّا.
- قسمة كثير حدود على كثير حدود آخر باستعمال القسمة الطويلة.
- تحليل المقادير الجبرية الخطّية والتربيعية غير الأوّلية وحالات خاصة من درجات أعلى.
- حل المعادلات الخطية والتربيعية بمتغير واحد.

سأتعلّم في هذه الوحدة:

- الاقتران المتشعّب واقتران القيمة المطلقة وتمثيلهما بيانيًّا.
- حل معادلات القيمة المطلقة ومتبايناتها لمقادير خطية.
- تحليل كثيرات حدود باستعمال نظرية العوامل ونظرية الأصفار النسبية.
- حل معادلات كثيرات حدود باستعمال نظرية العوامل ونظرية الأصفار النسبية.
- كتابة مقادير نسبية في صورة مجموع كسور جزئية.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (6–16) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

الدرس 1

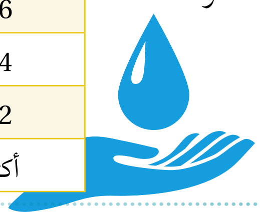
الاقترانات المتشعّبة
Piecewise Functions

فكرة الدرس تعرّف الاقتران المتشعّب واقتران القيمة المطلقة وتمثيلهما بيانيًّا، وتحديد مجال كلّ منهما ومداه.

المصطلحات الاقتران المتشعّب، اقتران القيمة المطلقة، رأس الاقتران.

مسألة اليوم يُبيّن الجدول المجاور تعرفة ثمن المياه للاستهلاك المنزلي في الدورة الواحدة لبعض شرائح الاستهلاك. كم تدفع أسرة استهلكت $42\ m^3$ من الماء؟

شرائح الاستهلاك مقرّبة إلى أقرب m^3	التعرفة JD/m^3
0 – 18	0.361
19 – 36	0.450
37 – 54	0.550
55 – 72	1.000
أكثر من 72	1.200



الاقتران المتشعب

أُلاحظ في المسألة السابقة، أنّه لا يُمكن كتابة معادلة واحدة بدلالة كمّية المياه المستهلكة x يمكن من خلالها حساب ثمن المياه لأي قِيَم x؛ لذا، نحتاج إلى معادلة خاصّة بكلّ واحدة من شرائح الاستهلاك.

يُسمّى الاقتران المعرّف بقواعد مختلفة عند أجزاء مختلفة في مجاله **اقترانًا متشعّبًا** (piecewise function).

أتذكّر

مجال أيّ اقترانٍ هو مجموعة القيم التي يأخذُها المُتغيِّر x، ومداه هو مجموعة القيم التي يأخذُها المُتغيِّر y.

مثال 1

إذا كان

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & , -3 \le x < 1 \\ x^2 & , x \ge 1 \end{cases}$$

1 أُحدّد مجال $f(x)$

أُلاحظ أنّ الاقتران معرّف بقاعدتين؛ الأولى $f(x) = -2x+1$ وتُستعمل لحساب قِيَم الاقتران عندما تكون $-3 \le x < 1$، والثانية $f(x) = x^2$ وتُستعمل لحساب قِيَم الاقتران عندما تكون $x \ge 1$. إذن: مجال $f(x)$ هو الفترة $[-3 , \infty)$

لغة الرياضيات

تُسمّى النقطة التي تتغيّر عندها قاعدة الاقتران المُتشعِّب نقطةَ التشعُّب، فمثلًا: في الاقتران $f(x)$ المجاور، يُسمّى العدد 1 الإحداثي x لنقطة التشعّب.

2 أجد قيمة $f(-2)$.

بما أنّ $-3 < -2 < 1$؛ إذن: أستعمل القاعدة الأولى.

$f(x) = -2x + 1$ القاعدة الأولى

$f(-2) = -2(-2) + 1$ بتعويض $x = -2$

$= 5$ بالتبسيط

3 أجد قيمة $f(1)$.

بما أنّ $1 \geq 1$؛ إذن: أستعمل القاعدة الثانية.

$f(x) = x^2$ القاعدة الثانية

$f(1) = (1)^2$ بتعويض $x = 1$

$= 1$ بالتبسيط

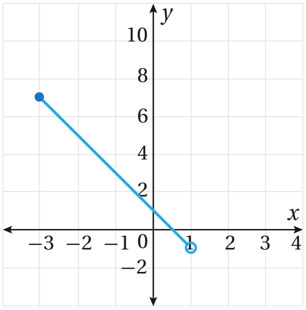
4 أُمثّل الاقتران $f(x)$ بيانيًّا، وأُحدّد مداه.

الخطوة 1: أُمثّل $f(x) = -2x + 1$ عندما $-3 \leq x < 1$

أجد قيمة الاقتران $f(x) = -2x + 1$، عندما $x = 1$، وعندما $x = -3$ كما في الجدول الآتي:

x	-3	1
$y = f(x) = -2x + 1$	7	-1
(x, y)	$(-3, 7)$	$(1, -1)$

أُعيّن النقطتين $(-3, 7), (1, -1)$ في المستوى الإحداثي وأصل بينهما، وبما أنّ العدد (-3) يُحقّق المتباينة $-3 \leq x < 1$؛ أبدأ التمثيل بدائرة مظلّلة عند النقطة $(-3, 7)$، أمّا العدد (1) فهو لا يُحقّق المتباينة؛ لذا، أُنهي التمثيل بدائرة غير مظلّلة عند النقطة $(1, -1)$.



الخطوة 2: أُمثّل $f(x) = x^2$ عندما $x \geq 1$

منحنى الاقتران $f(x) = x^2$ عندما $x \geq 1$ هو جزء من منحنى قطع مكافئ مفتوح إلى الأعلى، أنشئ جدول قِيَم؛ لأرسم الجزء من منحنى القطع المكافئ، الذي يقع يمين العدد 1

x	1	2	3
$y = f(x) = x^2$	1	4	9
(x, y)	$(1, 1)$	$(2, 4)$	$(3, 9)$

أتذكّر

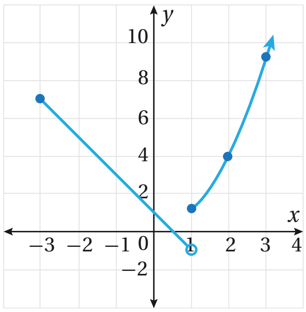
بما أنّ $f(x) = -2x+1$ اقتران خطّي؛ لذا، تكفي نقطتان لتمثيله بيانيًّا.

أتذكّر

يُمثّل الاقتران $f(x) = ax^2+bx+c$ قطعًا مكافئًا مفتوحًا إلى الأعلى إذا كانت قيمة $a > 0$، ومفتوحًا إلى الأسفل إذا كانت قيمة $a < 0$، ومعادلة محور تماثله هي $x = \frac{-b}{2a}$، وإحداثيّا رأسه هما: $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$.

أُعيّن النقاط $(1, 1), (2, 4), (3, 9)$ في المستوى الإحداثي، ثم أصل بينها بخط منحنٍ، وبما أنّ العدد 1 يُحقّق المتباينة $x \geq 1$، إذن: أبدأ التمثيل بدائرة مظلّلة عند $(1, 1)$.

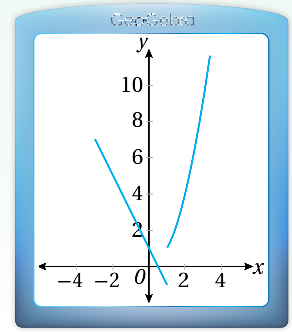
بالنظر إلى التمثيل البياني؛ أُلاحظ أنّ مدى هذا الاقتران هو $y > -1$ ويُمكن التعبير عنه بالفترة $(-1, \infty)$.



الدعم البياني

يمكن استعمال برمجية جيوجبرا لتمثيل الاقتران $f(x)$ بيانيًّا، عن طريق المعادلة الآتية:

$f(x) = if(-3 \leq x < 1, -2x + 1, x \geq 1, x^2)$



أتحقّق من فهمي

إذا كان:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & , x < 2 \\ 5 & , x = 2 \\ 2x - 1 & , x > 2 \end{cases}$$

a) أُحدّد مجال $f(x)$

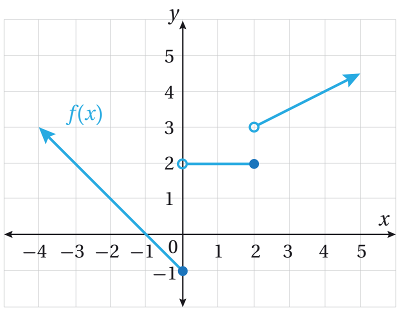
b) أجد قيمة كلّ من $f(5)$، وَ $f(2)$

c) أُمثّل الاقتران $f(x)$ بيانيًّا، وأُحدّد مداه.

يُمكنني أيضًا أن أجد قاعدة الاقتران المتشعّب؛ إذا أُعطيتُ تمثيله البياني، كما يتّضح من المثال الآتي.

مثال 2

أكتبُ قاعدة الاقتران المتشعّب $f(x)$ الممثّل بيانيًّا في الشكل المجاور.



أكتبُ الاقتران الذي يُمثّل كلّ جزء في التمثيل البياني.

الخطوة 1: أكتبُ القاعدة التي يُمثّلها الجزء الأيسر في التمثيل البياني.

الجزء الأيسر في التمثيل البياني هو اقتران خطي مقطعه مع المحور y هو -1 وميله -1 وباستعمال صيغة الميل والمقطع فإن قاعدة هذا الجزء هي: $f(x) = -x - 1$، ووجود دائرة مظلّلة عند النقطة $(0, -1)$، يعني أنّ هذه القاعدة تقابل الفترة $(-\infty, 0]$ من مجال $f(x)$.

أتذكّر

ميل المستقيم المار بالنقطتين $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ هو:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ومعادلته بصيغة الميل والمقطع هي: $y = mx + b$، حيث m ميل المستقيم، و b المقطع y، ومعادلته بصيغة الميل ونقطة هي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

الخطوة 2: أكتبُ القاعدة التي يُمثّلها الجزء الأوسط في التمثيل البياني.

الجزء الأوسط في التمثيل البياني هو الاقتران الثابت $f(x) = 2$، ووجود دائرة مظلّلة عند $(2, 2)$، ودائرة غير مظلّلة عند $(0, 2)$، يعني أنّ هذه القاعدة تقابل الفترة $[0, 2]$ من مجال $f(x)$.

الخطوة 3: أكتبُ القاعدة التي يُمثّلها الجزء الأيمن في التمثيل البياني.

الجزء الأيمن في التمثيل البياني اقتران خطي ميله 0.5 وباستعمال صيغة الميل ونقطة، فإن قاعدة هذا الجزء هي: $f(x) - 4 = 0.5\,(x - 4)$، ويمكن إعادة كتابتها على الصورة: $f(x) = 0.5x + 2$، ووجود دائرة غير مظلّلة عند $(2, 3)$، يعني أنّ هذه القاعدة تقابل الفترة $(2, \infty)$ من مجال الاقتران $f(x)$.

إذن: تكون قاعدة هذا الاقتران المتشعّب على النحو الآتي:

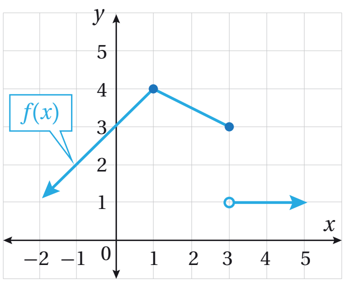
$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & , \ x \leq 0 \\ 2 & , \ 0 < x \leq 2 \\ 0.5x + 2 & , \ x > 2 \end{cases}$$

أتعلّم

بما أن المقطع y للجزء الأيمن من الاقتران لا يظهر في التمثيل البياني مثل الجزء الأيسر، أبدأ بكتابة قاعدة هذا الجزء من التمثيل بصيغة الميل ونقطة أولًا، ثم أعيد كتابته بصورة الميل والمقطع.

أتحقّق من فهمي

أكتبُ قاعدة الاقتران $f(x)$ الممثّل بيانيًّا في الشكل المجاور.



يُمكن نمذجة كثير من المواقف الحياتية باستعمال الاقترانات المتشعّبة.

مثال 3: من الحياة

عمل: أجرة ساعة العمل الواحدة في إحدى الشركات 4 دنانير خلال أوقات العمل النظامية المعتادة ضمن 40 ساعة عمل في الأسبوع. وتدفع الشركة لكلّ ساعة عمل إضافي فوق ذلك أجرة ساعة ونصف من ساعات العمل المعتاد. أكتبُ اقترانًا لحساب الأجرة الأسبوعية لعامل اشتغل x ساعة في أسبوع.

يوجد في المسألة قاعدتان لحساب الأجرة؛ تبعًا لعدد ساعات العمل.

الأجرة	عدد الساعات
$4x$	$0 \leq x \leq 40$
$4(40) + 6(x - 40)$	$x > 40$

أتعلّم

أجرة ساعة العمل الإضافي تساوي أجرة ساعة ونصف من العمل النظامي.

$4 \times 1.5 = 6$

إذن: اقتران الأجرة هو:

$$f(x)=\begin{cases}4x & ,\ 0\le x\le 40\\ 6x-80 & ,\ x>40\end{cases}$$

أتحقّق من فهمي

زادت شـركة رواتب موظفيها الشهرية وفق الأسـس الآتية: الرواتب التي تقلّ عن 400 دينار زيدت بنسبة 15%، والرواتب من 400 دينار إلى أقلّ من 600 دينار زيدت بنسبة 10%، مع علاوة ثابتة بقيمة 20 دينارًا، والرواتب من 600 دينار وأكثر زيدت 80 دينارًا. أكتبُ اقترانًا متشعّبًا لحساب الراتب الجديد لموظّفي الشركة.

أتذكّر

القيمة المطلقة لأيّ عدد حقيقي x والتي يُرمز إليها بالرمز $|x|$ تساوي بعده عن الصفر على خط الأعداد، وبما أنّ البعد لا يكون سالبًا، فإنه توجد حالتان:

$|x|=x\ ,\ x\ge 0$

$|x|=-x\ ,\ x<0$

مثال عددي:

$\left|-\frac{1}{2}\right|=\left|+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$

اقتران القيمة المطلقة

اقتـران القيمة المطلقـة (absolute value function) هو اقتران يحتوي على قيمة مطلقة لمقدار جبري، ومن أمثلته:

$$f(x)=2|x|+3\quad,\quad f(x)=|x^2-2x-3|\quad,\quad f(x)=\left|\frac{x+2}{2x-6}\right|$$

ومن أبسط اقترانات القيمة المطلقة الاقتران $f(x)=|x|$، ويُمكن كتابته بصورة اقتران متشعّب كما يأتي:

$$f(x)=|x|=\begin{cases}-x & ,\ x<0\\ x & ,\ x\ge 0\end{cases}$$

تُسمّى إعادة كتابة أيّ اقتران قيمة مطلقة على صورة اقتران متشعّب، من دون استعمال رمز القيمة المطلقة، **إعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة**.

مثال 4

أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة: $f(x)=|2x+4|$

الخطوة 1: أُساوي ما في داخل رمز القيمة المطلقة بالصفر، ثم أحلّ المعادلة الناتجة:

$2x+4=0$ بمساواة ما في داخل رمز القيمة المطلقة بالصفر

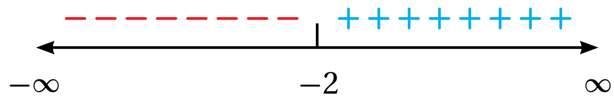
$2x+4-4=0-4$ بطرح 4 من طرفي المعادلة

$\frac{2x}{2}=\frac{-4}{2}$ بقسمة طرفي المعادلة على 2

$x=-2$ بالتبسيط

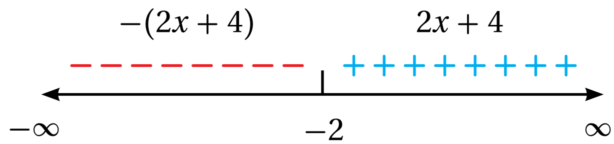
الخطوة 2: أُعيّن صفر المعادلة على خط الأعداد، ثم أُحدّد الإشارة على جانبيه.

أُعيّن صفر المعادلة (-2) على خط الأعداد، ثمّ أُحدّد الإشــارة على جانبَيه، وذلك بتعويض أيّ قيمة أقلّ من -2 في $2x + 4$ لأجد أنّ ناتج التعويض ســالب دائمًا، ما يعني أنّ الإشــارة يسار -2 ســالبة. وأُعوّض أيّ قيمة أكبر من -2 في $2x + 4$ لأجد أنّ ناتج التعويض موجب دائمًا، ما يعني أنّ الإشارة يمين -2 موجبة.



الخطوة 3: أكتبُ قاعدتَي الاقتران حسب إشارة يمين صفر المعادلة ويساره.

أكتبُ ما في داخل رمز القيمة المطلقة كما هو دون تغيير في الجزء الموجب، وأكتبُ في الجزء السالب ما في داخل رمز القيمة المطلقة مضروبًا في -1



الخطوة 4: أكتبُ قاعدة الاقتران المتشعّب.

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 4 & , \ x < -2 \\ 2x + 4 & , \ x \geq -2 \end{cases}$$

أتحقّق من فهمي

أُعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة: $f(x) = |3x - 9|$

أتعلّم

يأخــذ الاقتــران الخطّي يمين صفره إشارة معامل x نفسها، ويســار صفره عكس إشارة معامل x.

أتعلّم

يمكن تغيير مكان المساواة في قاعــدة الاقتران $f(x)$ وكتابته على الصورة الآتية:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 4 & , \ x \leq -2 \\ 2x + 4 & , \ x > -2 \end{cases}$$

تمثيل اقتران القيمة المطلقة بيانيًّا

يتكوّن التمثيل البيانــي لاقتران القيمة المطلقة الذي على الصــورة $f(x) = a|x-h| + k$، حيث $a \neq 0$، من شعاعين على شكل حرف V متماثلين حول المحور $x = h$، ورأس الاقتران (function vertex) هــو النقطــة التي يصل عندها إلى أعلى قيمــة أو أقلّ قيمة وإحداثياها (h, k).

يُمكن تمثيل اقتران القيمة المطلقة بيانيًّا باستعمال محور التماثل والرأس.

مثال 5

أُمثّل بيانيًّا كلّ اقتران ممّا يأتي، وأحدّد مجاله ومداه:

1 $f(x) = |x|$

الخطوة 1: أجد إحداثيَي نقطة رأس الاقتران، ومعادلة محور التماثل.

(h, k) إحداثيّا نقطة الرأس

$= (0, 0)$ بتعويض $h = 0, k = 0$

إذن، إحداثيا نقطة الرأس $(0, 0)$، ومعادلة محور التماثل $x = 0$ (المحور y).

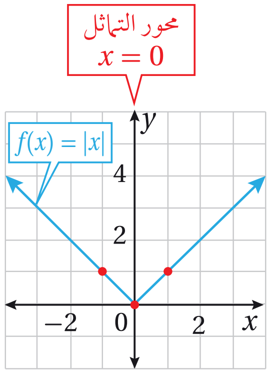
الخطوة 2: أُحدّد قيمتين للمتغيّر x حول محور التماثل، ثم أجد صورتيهما.

بما أنّ محور التماثل $x = 0$، أختار قيمة للمتغيّر x أكبر من 0 (مثلًا 1) وقيمة أخرى أقلّ من 0 (مثلًا -1)، ثم أجد صورتيهما في الاقتران.

x	-1	1
$f(x) = \|x\|$	1	1
(x, y)	$(-1, 1)$	$(1, 1)$

الخطوة 3: أُمثّل النقطتين والرأس بيانيًّا.

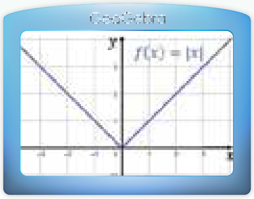
أُمثّل النقطتين والرأس في المستوى الإحداثي، وأصل بين النقاط الثلاث بشكل V.



يُلاحظ من التمثيل البياني أنّ المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، وأنّ المدى $[0, \infty)$.

الدعم البياني

يُمكِن استعمال برمجية جيوجبرا لتمثيل الاقتران $f(x) = |x|$، وذلك بكتابة $f(x) =$ في شريط الإدخال، ثم نقر [ ] في لوحة المفاتيح، وكتابة x بين خطي القيمة المطلقة، ثم الضغط على زرّ الإدخال (ENTER)، فيظهر التمثيل البياني كما يأتي:



2 $f(x) = -|x+2| + 3$

الخطوة 1: أجد إحداثيَي نقطة رأس الاقتران، ومعادلة محور التماثل.

إحداثيّا نقطة الرأس	(h, k)
بتعويض $h = -2, k = 3$	$= (-2, 3)$

إذن، إحداثيا نقطة الرأس $(-2, 3)$، ومعادلة محور التماثل $x = -2$.

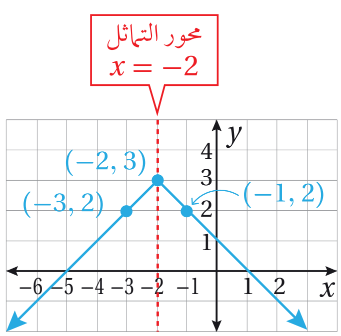
الخطوة 2: أُحدّد قيمتين للمتغيّر x حول محور التماثل، ثم أجد صورتيهما.

بما أنّ محور التماثل $x = -2$، أختار قيمة للمتغيّر x أكبر من -2 (مثلًا -1) وقيمة أخرى أقلّ من -2 (مثلًا -3)، ثم أجد صورتيهما في الاقتران.

x	-3	-1
$f(x) = -\lvert x+2\rvert + 3$	2	2
(x, y)	$(-3, 2)$	$(-1, 2)$

الخطوة 3: أُمثّل النقطتين والرأس بيانيًّا.

أُمثّل النقطتين والرأس في المستوى الإحداثي، وأصل بين النقاط الثلاث بشكل V مقلوب.



أُلاحظ من التمثيل البياني أنّ المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، وأنّ المدى $(-\infty, 3]$.

أتحقّق من فهمي

أُمثّل بيانيًّا كلّ اقتران ممّا يأتي، وأُحدّد مجاله ومداه:

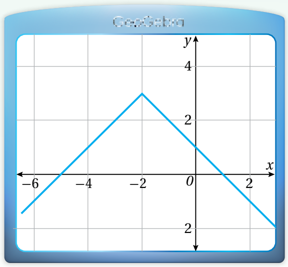
a) $f(x) = 2|x|$ **b)** $f(x) = -2|x-4| + 3$ **c)** $f(x) = |x-3| - 2$

أتعلّم

يكون اقتران القيمة المطلقة على الصورة $f(x) = a|x-h| + k$، حيث $a \neq 0$، مفتوحًا إلى الأعلى إذا كانت $a > 0$، ومفتوحًا إلى الأسفل إذا كانت $a < 0$.

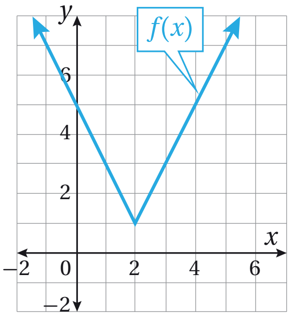
الدعم البياني

يمكن استعمال برمجية جيوجبرا لتمثيل الاقتران $f(x) = -|x+2| + 3$، وذلك بكتابة قاعدة الاقتران في شريط الإدخال، ثم الضغط على زرّ الإدخال (ENTER)، فيظهر التمثيل البياني كما يأتي:



يُمكن إيجاد قاعدة اقتران القيمة المطلقة لمقدار خطّي؛ إذا أُعطي تمثيله البياني.

مثال 6



أكتبُ قاعدة اقتران القيمة المطلقة $f(x)$ الممثّل بيانيًّا في الشكل المجاور.

يظهر من الشكل أن إحداثيَّي رأس اقتران القيمة المطلقة $(2, 1)$، وهذا يعني أنه يمكن كتابة قاعدة الاقتران بالصورة الآتية:

$$f(x) = a|x - 2| + 1$$

ولإيجاد قيمة a، أعوض في قاعدة الاقتران إحداثيي أي نقطة تقع على منحى الاقتران (مثلًا: $(0, 5)$)، وأحل المعادلة الناتجة.

$f(x) = a|x - 2| + 1$ قاعدة الاقتران

$5 = a|0 - 2| + 1$ بتعويض $(0, 5)$

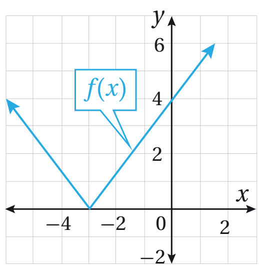
$5 = 2a + 1$ بالتبسيط

$4 = 2a$ بطرح 1 من طرفي المعادلة

$a = 2$ بالقسمة طرفي المعادلة على 2

إذن: قاعدة الاقتران هي: $f(x) = 2|x - 2| + 1$

أتحقّق من فهمي



أكتبُ قاعدة اقتران القيمة المطلقة $f(x)$ الممثّل بيانيًّا في الشكل المجاور.

أتدرّب وأحلّ المسائل

إذا كان $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & , x < -1 \\ 4x - 3 & , -1 \leq x \leq 4 \\ 2 & , x > 4 \end{cases}$ ، فأجد كلًّا من:

1. $f(-2)$
2. $f(-1)$
3. $f(0)$
4. $f(4)$
5. $f(8)$
6. $f(5)$

أُعيد تعريف كلّ من الاقترانين الآتيين:

7) $f(x) = |3x - 6|$

8) $f(x) = |7x - 5| + 3$

أُمثّل كلاًّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا، وأُحدّد مجالها ومداها:

9) $f(x) = \begin{cases} 3-2x & , x < -1 \\ 6 & , -1 \leq x \leq 3 \\ x^2 & , x > 3 \end{cases}$

10) $f(x) = \begin{cases} 3 & , x = 1 \\ -x + 2 & , x \neq 1 \end{cases}$

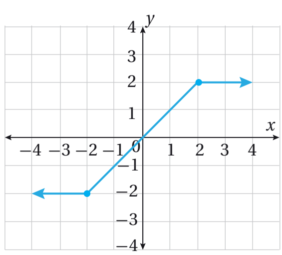
11) $f(x) = \begin{cases} x+5 & , x \neq 2 \\ 6 & , x = 2 \end{cases}$

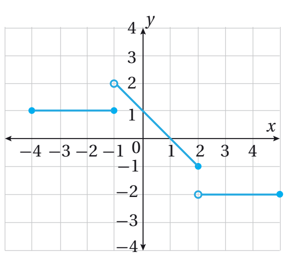
12) $f(x) = \begin{cases} 2 & , x \leq 3 \\ -2 & , x > 3 \end{cases}$

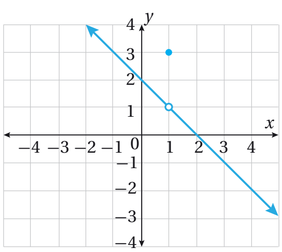
13) $f(x) = 2|x + 3|$

14) $f(x) = -|x - 4| + 1$

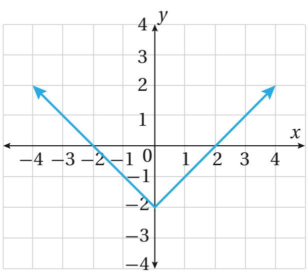
أكتبُ قاعدة الاقتران المتشعّب الممثّل بيانيًّا في كلّ من الأشكال الآتية:

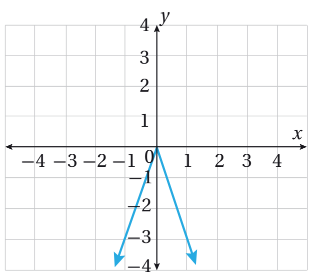
15) 

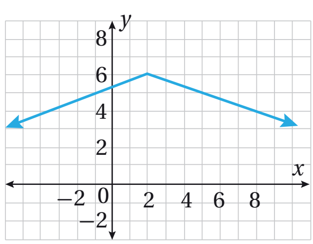
16) 

17) 

أكتبُ قاعدة اقتران القيمة المطلقة الممثّل بيانيًّا في كلّ من الأشكال الآتية:

18) 

19) 

20) 

خيمة: يُمثّــل منحنــى الاقتــران $f(x) = -1.4\,|x - 2.5| + 3.5$ حافتَي الوجه الأمامي لخيمة، ويُمثّل العمود الذي يتوسّــط الوجه الأمامي للخيمة محور التماثل، أمّا المحور x فيُمثّله سطح الأرض.

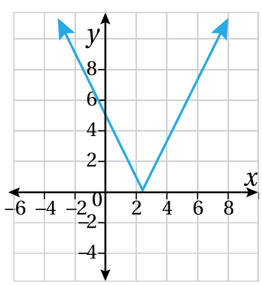
21 أُمثّل الاقتران بيانيًّا.

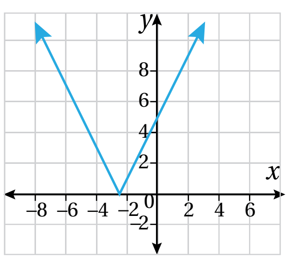
22 أجد مجال الاقتران ومداه.

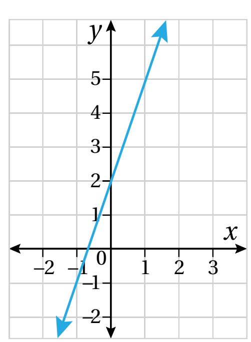
23 أعود إلى مسألة اليوم، وأكتبُ الاقتران المتشعّب الذي يُمكنني استعماله لحساب ثمن المياه لأيّ كمّية مستهلكة.

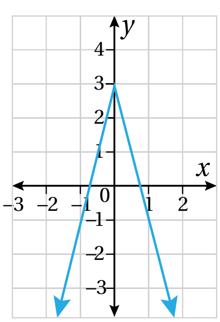
مهارات التفكير العليا

24 **تبرير:** أيّ الآتية تُمثّل منحنى الاقتران $f(x) = |2x - 5|$؟ أُبرّر إجابتي:

a)


b)


c)


d)


25 **تحدٍّ:** أُمثّل الاقتران: $g(x) = -|4 - 2x| - 3$ بيانيًّا.

الدرس 2

حلّ معادلاتِ القيمة المُطلقة ومتبايناتها

Solving Absolute-Value Equations and Inequalities

فكرة الدرس حلّ معادلات القيمة المُطلقة ومتبايناتها.

المصطلحات معادلة القيمة المطلقة، متباينة القيمة المطلقة.

مسألة اليوم استعملت مريم 8 g منْ مادّة كيميائيّة في تجربة علميّة. إذا كان الميزان المخبريّ الّذي اســتعملتْه مريم يحدّد الكتلة بهامش خطأً لا يتجاوز ± 0.1 g، فأكتب متباينة قيمة مطلقة تحدّد الكتلة الحقيقيّة للمادّة الّتي استعملتْها.

أتذكّر

القيمــة المطلقــة للعدد هي المســافة بيــن ذلك العــدد والصّفر على خطّ الأعداد.

معادلات القيمة المطلقة

معادلة القيمة المطلقة (absolute value equation) هي معادلة تحتوي على قيمة مطلقة. وبما أنّ القيمة المطلقة لكلّ من العدد ومعكوســه متســاويتان، فيمكن تحويل معادلة القيمة المطلقــة إلى معادلتين مرتبطتين بها لا تحتويان على رمز القيمة المطلقة، وذلك بجعل العبارة الّتي داخل القيمة المطلقة موجبة مرّة وسالبة مرّة أُخرى.

مفهوم أساسي **حلُّ مُعادلاتِ القيمةِ المُطلقةِ**

لحلّ المعادلة $|ax + b| = c$؛ حيث $c \geq 0$، أحلّ المعادلتين المرتبطتين بها، وهما:

$$ax + b = c \qquad \text{or} \qquad ax + b = -c$$

مثال 1

أحلّ كلّا من المعادلات الآتية، وأمثّل مجموعة الحلّ على خطّ الأعداد (إن أمكن):

1 $|x - 8| = 2$

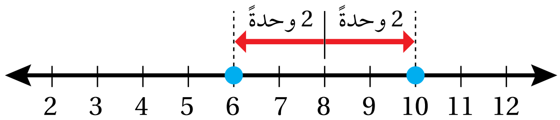
$x - 8 = 2$ or $x - 8 = -2$ بكتابة المعادلتين المرتبطتين

$x = 10$ $x = 6$ بجمع 8 لكلّ طرف

أتعلّم

تعني المعادلة $|x - 8| = 2$ أنّ المســافة بيــن x و 8 تساوي 2 وحدة.

إذن، مجموعة حلّ المعادلة هي: $\{6, 10\}$، وتمثيلها على خطّ الأعداد على النّحو الآتي:



2 $2|x-4|+10=16$

لحلّ هذه المعادلة، أكتب القيمة المطلقة أوّلًا معزولة في أحد طرفي المعادلة.

المعادلة المعطاة $2|x-4|+10=16$

بطرح 10 من طرفي المعادلة $2|x-4|=6$

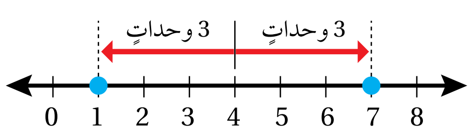
بقسمة طرفي المعادلة على 2 $|x-4|=3$

الآن، أكتب معادلتين مرتبطتين بالمعادلة $|x-4|=3$، ثمّ أحلّ كلًّا منهما.

بكتابة المعادلتين المرتبطتين $x-4=-3$ or $x-4=3$

بجمع 4 لكلّ طرف $x=1$ $x=7$

إذن، مجموعة حلّ المعادلة هي: $\{1, 7\}$، وتمثيلها على خطّ الأعداد على النّحو الآتي:



3 $|3x+1|=-5$

المعادلة $|3x+1|=-5$ تعني أنّ المسافة بين $3x$ و -1 تساوي -5

وبما أنّه لا يمكن أن تكون المســافة ســالبة، فإنّ مجموعة حلّ هذه المعادلة $\varnothing$؛ أي أنّه لا يوجد حلّ للمعادلة.

أتحقّق من فهمي

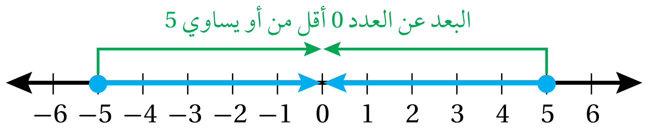
أحلّ كلّا من المعادلات الآتية، وأمثّل مجموعة الحلّ على خطّ الأعداد (إن أمكن):

a) $|x-7|=5$ **b)** $4|2x+7|=16$ **c)** $|x+4|=-10$

متباينات القيمة المطلقة

متباينة القيمة المطلقة (absolute value inequality) هي متباينة تحتوي على قيمة مطلقة.

فمثلًا، $|x| \le 5$ هي متباينة قيمة مطلقة، وتعني أنّ المسافة بين x و 0 أقلّ من أو تساوي 5؛ لذا فإنّ $x \le 5$ و $x \ge -5$



وبذلك، فإنّ مجموعة حلّ هذه المتباينة هي الفترة $[-5, 5]$.

وبشكل عامّ، يمكن تحويل متباينة القيمة المطلقة، الّتي تحتوي على الرّمز ($<$) إلى متباينة مركّبة تحتوي على أداة الرّبط (و)، ثمّ حلّ المتباينة المركّبة الناتجة.

مفهوم أساسي

حلّ متباينات القيمة المطلقة ($<$)

لحلّ المتباينة $|ax + b| < c$؛ حيث $c > 0$، أحلّ المتباينة المركّبة المرتبطة بها، وهي:

$$-c < ax + b < c$$

تبقى القاعدة صحيحة إذا احتوت المتباينة على ($\le$)

مثال 2

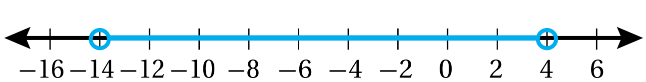
أحلّ كلّا من المتباينات الآتية، وأمثّل مجموعة الحلّ على خطّ الأعداد (إن أمكن):

1 $|x + 5| < 9$

$-9 < x + 5 < 9$ المتباينة المركّبة المرتبطة

$-14 < x < 4$ بطرح 5 من كلّ طرف

إذن، مجموعة حلّ المتباينة هي $\{x \mid -14 < x < 4\}$، ويمكن كتابتها باستعمال رمز الفترة على الصورة: $(-14, 4)$، ويمكن تمثيلها على خطّ الأعداد على النّحو الآتي:



أتعلّم

المتباينة $|x + 5| < 9$ تعني أنّ المسافة بين x وَ -5 أقلّ من 9 وحدات.

2 $-4|x+3|-2 \geq 6$

لحلّ هذه المتباينة، أكتب أوّلًا مقدار القيمة المطلقة معزولًا في أحد طرفي المتباينة.

$-4\|x+3\|-2 \geq 6$	المتباينة المعطاة
$-4\|x+3\| \geq 8$	بجمع 2 لطرفي المتباينة
$\|x+3\| \leq -2$	بقسمة طرفي المتباينة على -4، وتغيير اتّجاه رمز المتباينة

بما أنّ $|x+3|$ لا يمكن أن تكون سـالبة، فلا يمكن أن تكون $|x+3|$ أقلّ من -2، ومنه فإنّ مجموعة حلّ هذه المتباينة $\varnothing$؛ أي أنّه لا يوجد حلٌّ للمتباينة المعطاة.

أتحقّق من فهمي

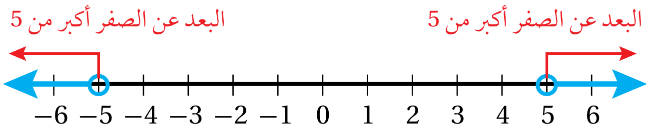
أحلّ كلّا من المتباينات الآتية، وأمثّل مجموعة الحلّ على خطّ الأعداد (إن أمكن):

a) $|x-2| \leq 1$ **b)** $|x+7|+10 < 2$

أتذكّر

يُستعمَل الرّمز] أو الرّمز [للدّلالة على انتماء طرف الفترة إليها، أمّا الرّمز (أو الرّمز) فيُستعمَل للدّلالة علـى عدم انتمـاء طرف الفترة إليها.

تعنـي متباينـة القيمة المطلقة $|x| > 5$ أنّ المسـافة بين x و 0 أكبر من 5؛ لـذا فإنّ $x > 5$ أو $x < -5$



وبذلك، فإنّ مجموعة حلّ هذه المتباينة هي $(-\infty, -5) \cup (5, \infty)$

وبشـكل عامّ، يمكن تحويل متباينة القيمة المطلقة، الّتي تحتوي على الرّمز ($>$)، إلى متباينة مركّبة تحتوي على أداة الرّبط (أو)، ثمّ حلّ المتباينة المركّبة الناتجة.

مفهومٌ أساسيٌّ
حلّ متباينات القيمة المطلقة ($>$)

لحلّ المتباينة $|ax+b| > c$؛ حيث $c > 0$، أحلّ المتباينة المركّبة المرتبطة بها، وهي:

$$ax+b < -c \qquad \text{or} \qquad ax+b > c$$

تبقى القاعدة صحيحة إذا احتوت المتباينة على ($\geq$)

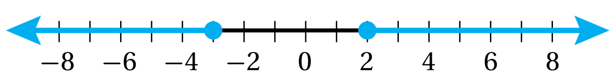
مثال 3

أحلّ كلّا من المتباينات الآتية، وأمثّل مجموعة الحلّ على خطّ الأعداد (إن أمكن):

1 $|2x+1| \geq 5$

المتباينة المركّبة المرتبطة	$2x+1 \geq 5$	or	$2x+1 \leq -5$
بطرح 1 من كلّ طرف	$2x \geq 4$		$2x \leq -6$
بقسمة كلّ طرف على 2	$x \geq 2$	or	$x \leq -3$

إذن، مجموعة الحلّ هي $\{x \mid x \leq -3 \ \text{ or } \ x \geq 2\}$، ويمكن كتابتها باستعمال اتحاد فترتين منفصلتين على الصورة: $(-\infty, -3] \cup [2, \infty)$، وتمثيلها البيانيّ على النّحو الآتي:



2 $|4x+8| \geq -3$

ينصّ تعريف القيمة المطلقة على أنّ مقدارها يجب أن يكون أكبر من أو يســاوي صفرا، ومنه فإنّ $|4x+8|$ دائما أكبر من -3 لأيّ من قيم المتغيّر x

إذن، مجموعة الحلّ هي مجموعة الأعداد الحقيقيّة R، ويمكن كتابتها باســتعمال رمز الفترة على الصورة: $(-\infty, \infty)$.

رموز رياضيّة

يُرمز إلى مجموعة الأعداد الحقيقيّة بالحرف R، وهو الحرف الأوّل من كلمة Real باللغة الإنجليزيّة، وتعني "حقيقيًّا".

أتحقّق من فهمي

أحلّ كلّا من المتباينات الآتية، وأمثّل مجموعة الحلّ على خطّ الأعداد (إن أمكن):

a) $|x-3| \geq 4$

b) $|10-x| > -5$

يمكن استعمال المتباينات في كثير من التطبيقات الحياتيّة.

مثال 4 : من الحياة

صناعة: ينتج مصنع رؤوس مثاقب طول قطرها المثاليّ 0.625 cm، ويسمح أن يزيد طول هذا القطر أو يقلّ بمقدار لا يتجاوز 0.005 cm، أكتب متباينة قيمة مطلقة أجد بها المدى المسموح به لطول قطر رأس المثقب.

معلومة

توجد في بعض المثاقب خاصيّة الاهتزاز في أثناء الدّوران؛ ما يساعد على ثقب الجدران الخرسانيّة بسهولة.

بالكلمات: الفرق بين طول القطر الحقيقيّ وطول القطر المثاليّ لا يتجاوز 0.005

أختار متغيّرًا: ليكن x ممثّلًا طول قطر رأس المثقب.

أكتب المتباينة: $|x - 0.625| \leq 0.005$

المتباينة	$\lvert x - 0.625\rvert \leq 0.005$
المتباينة المركّبة المرتبطة	$-0.005 \leq x - 0.625 \leq 0.005$
بجمع 0.625 لكلّ طرف	$0.62 \leq x \leq 0.63$

إذن، المدى المسموح به لطول قطر رأس المثقب هو $[0.62, 0.63]$ بوحدة cm

أتحقّق من فهمي

صناعة: **إذا علمت أنّ طول القطر المثاليّ لأحد المكابس الأسطوانيّة في محرّكات السيّارات 90 mm، ويسمح أن يزيد طول هذا القطر أو يقلّ بمقدار لا يتجاوز 0.008 mm، فأكتب متباينة قيمة مطلقة أجد بها المدى المسموح به لطول قطر المكبس.**

أتدرّب وأحلّ المسائل

أحلّ كلًّا من المعادلات الآتية، وأمثّل مجموعة الحلّ على خطّ الأعداد (إن أمكن):

1) $|x + 3| = 7$

2) $|x - 8| = 14$

3) $|-3x| = 15$

4) $|3x + 2| + 2 = 5$

5) $|2x - 4| - 8 = 10$

6) $-4|8 - 5x| = 16$

أحلّ كلًّا من المتباينات الآتية، وأمثّل مجموعة الحلّ على خطّ الأعداد (إن أمكن):

7) $|x + 8| \leq 3$

8) $|2x - 5| < 9$

9) $|3x + 1| > 8$

10) $|3x - 1| + 6 > 0$

11) $2|3x + 8| - 13 \leq -5$

12) $-3|2 - 4x| + 5 < -13$

13) $|6x + 2| < -4$

14) $3|5x - 7| - 6 < 24$

15) $|5x + 3| - 4 \geq 9$

16 **أفاعي**: تعيش معظم الأفاعي في بيئة تتراوح درجة حرارتها من 75°F إلى 90°F، أكتب متباينة قيمة مطلقة تمثّل درجات حرارة البيئات التي لا تعيش فيها الأفاعي.

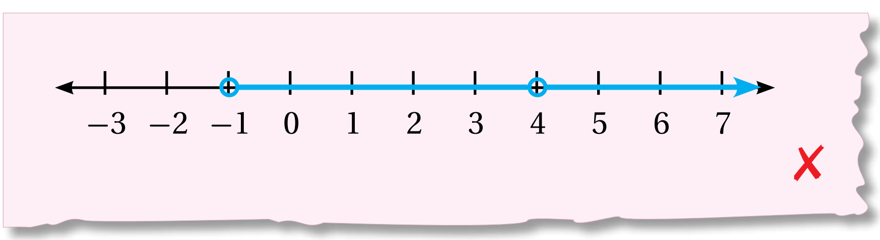
معلومة

الثعابين ليس لديها جفون. في حين أنّ لديها شيئًا يسمّى بريل، وهو طبقة شفّافة مثل (النظارة)، وعلى شكل الجلد وتُغطّي العينين للحماية.

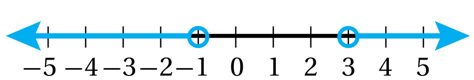
17 **كرة قدم**: إذا كانت الكتلة المثاليّة الموصى بها لكرة القدم 430 g، وكان مسموحًا أن تزيد على الكتلة المثاليّة أو تنقص عنها بمقدار 20 g، فأكتب معادلة قيمة مطلقة لإيجاد أكبر وأقلّ كتلة مسموح بها لكرة القدم، ثمّ أحلّها.

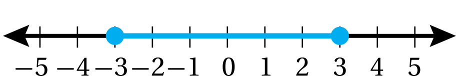
مهارات التفكير العليا

18 **أكتشف الخطأ**: مثّلت مريم مجموعة حلّ المتباينة $|2x - 3| > 5$ على خط الأعداد على النحو الآتي. هل كانت إجابتها صحيحة؟ أبرّر إجابتي.

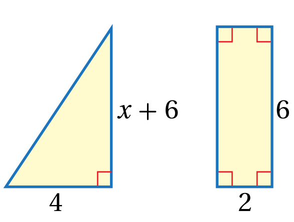


تبرير: أكتب متباينة قيمة مطلقة تعبّر عن كلّ تمثيل على خطّ الأعداد ممّا يأتي، وأبرّر إجابتي:

20 

19 

21 **تبرير**: يبيّن الشكل المجاور مثلّثًا ومستطيلًا الفرق بين مساحتيهما أقلّ من 2 وحدة مربّعة. أكتب متباينة قيمة مطلقة تمثّل الجملة السابقة وأحلّها، وأبرّر إجابتي.



22 **تحدّ**: أحلّ المتباينة المركّبة الآتية: $|x + 2| > 8$ and $|x - 3| < 4$

الدرس 3

نظريتا الباقي والعوامل
The Remainder and Factors Theorems

فكرة الدرس

- تعرُّف نظريتي الباقي والعوامل، واستعمالهما لتحليل اقترانات كثيرات الحدود وإيجاد أصفارها.
- حل معادلات كثيرات الحدود.

المصطلحات طريقة الجدول، نظرية الباقي، نظرية العوامل، أصفار الاقتران، نظرية الأصفار النسبية، معادلة كثير الحدود.

مسألة اليوم صندوق شاحنة على شكل متوازي مستطيلات، أبعاده بالأمتار: $x^2+6x-19$, x , 2. ما قيمة x التي تجعل حجم الصندوق $48\ m^3$؟

القسمة باستعمال الجدول

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ كثير الحدود بمُتغيِّر واحد يتكوَّن من وحيد حدٍّ أو أكثر، وأنَّ صورته العامة هي:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

حيث n عدد صحيح غير سالب، و $a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, a_0$ أعداد حقيقية.

يُسمّى الاقتران الذي يكون في صورة: $P(x)= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ اقتران كثير حدود، ومن أمثلته:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x\ , \qquad P(x) = 5\ , \qquad P(x) = 2-x$$

تعلَّمْتُ أيضًا أنَّه يُمكِن قسمة كثير حدود على كثير حدود آخر باستعمال القسمة الطويلة. فمثلًا، يُمكِن قسمة $(x^3 + 2x^2 - 11x - 12)$ على $(x + 4)$ كما يأتي:

ناتج القسمة ← $x^2 - 2x - 3$

المقسوم عليه ← $x+4$ ، المقسوم ← $x^3 + 2x^2 - 11x - 12$

$$\begin{array}{rrll}
 & x^2 - 2x - 3 & & \\
x+4 \,\big) & x^3 + 2x^2 - 11x - 12 & & \\
 & \underline{x^3 + 4x^2} & & \text{بالضرب في } x^2 \text{ بالطرح}\\
 & -2x^2 - 11x & & \\
 & \underline{-2x^2 - 8x} & & \text{بالضرب في } -2x \text{ بالطرح}\\
 & -3x - 12 & & \\
 & \underline{-3x - 12} & & \text{بالضرب في } -3 \text{ بالطرح}\\
 & 0 & &
\end{array}$$

باقي القسمة ← 0

أتعلَّم

يُسمّى اقتران كثير الحدود أحيانًا كثير حدود فقط اختصارًا.

أتذكَّر

قبل البَدْء بقسمة كثيرات الحدود، أكتب المقسوم والمقسوم عليه بالصورة القياسية.

أتذكَّر

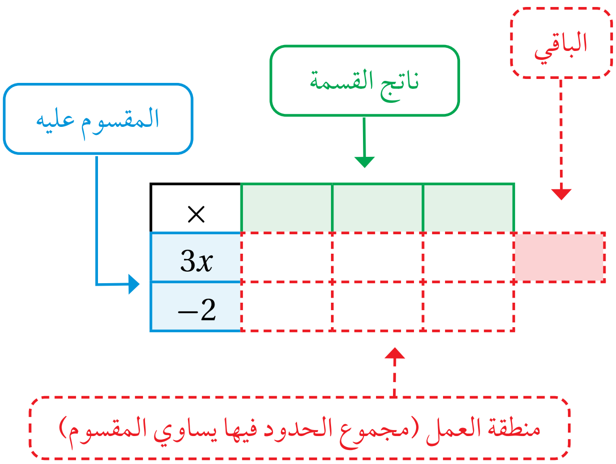
تتوقَّف عملية قسمة كثيرات الحدود عندما تصبح درجة باقي القسمة أقل من درجة المقسوم عليه.

طريقة الجدول (grid method) هي طريقة لقسمة كثيرات الحدود تعتمد بشكل أساسي على ضرب كثيرات الحدود، بوصفها عملية عكسية لعملية القسمة.

مثال 1

أستعمل طريقة الجدول لإيجاد ناتج: $(9x^3 - x + 3) \div (3x-2)$، ثمّ أتحقّق من صحّة الحلّ.

الخطوة 1: أُنشِئ جدولًا من 4 أعمدة (درجة ناتج القسمة +2) و3 صفوف (درجة المقسوم عليه +2)، ثمَّ أكتب حدود المقسوم عليه في العمود الأيسر، وأُضيف خانة الباقي إلى منطقة العمل.



الخطوة 2: أكتب الحدَّ الرئيس من المقسوم ($9x^3$) في الخانة اليسرى العليا من منطقة العمل.

×				
$3x$	$9x^3$			
-2				

الخطوة 3: أبحث عن حدٍّ جبري ناتج ضربه في $3x$ يساوي $9x^3$

بما أنَّ ناتج ضرب $3x$ في $3x^2$ يساوي $9x^3$، فإنَّني أكتب $3x^2$ أعلى الجدول.

×	$3x^2$			
$3x$	$9x^3$			
-2				

الخطوة 4: أضرب $3x^2$ في -2، ثمَّ أكتب الناتج ($-6x^2$) في الخانة المُناظِرة للحدَّين المضروبين. وبما أنَّ المقسوم في المسألة الأصلية لا يحوي حدًّا من الدرجة الثانية، فإنَّني أُضيف $6x^2$ إلى منطقة العمل كي أحذف الحدَّ $-6x^2$. عند إضافة $6x^2$ إلى منطقة العمل، فإنَّه يُمكِن تحديد الحدِّ الثاني من ناتج القسمة، وهو ($2x$)؛ لأنَّ ناتج ضرب $3x$ في $2x$ يساوي $6x^2$

×	$3x^2$	$2x$		
$3x$	$9x^3$	$6x^2$		
-2	$-6x^2$			

أتعلَّم

درجة كثير الحدود هي أكبر أُسٍّ للمُتغيِّر في حدوده جميعها. وعند قسمة كثير حدود على كثير حدود آخر، فإنَّ درجة ناتج القسمة تكون مُساوِية للفرق بين درجتي المقسوم والمقسوم عليه.

أتذكَّر

يُكتَب المقسوم $9x^3 - x + 3$ بالصورة القياسية كما يأتي:

$9x^3 + 0x^2 - x + 3$

الخطوة 5: أَضـرِب $2x$ في -2، ثمَّ أكتب الناتج $-4x$ فـي منطقة العمل. وللحصول على الحدِّ ذي الدرجة 1 في المقسوم $(-x)$،

×	$3x^2$	$2x$	1	
$3x$	$9x^3$	$6x^2$	$3x$	
-2	$-6x^2$	$-4x$		

يجب إضافة $3x$ إلى $-4x$ في منطقة العمل. عند إضافة $3x$، فإنَّه يُمكِن تحديد الحدِّ الأخير في ناتج القسمة، وهو (1)؛ لأنَّ ناتج ضرب $3x$ في 1 يساوي $3x$

الخطوة 6: أَضرِب 1 في -2، ثمَّ أكتب الناتج -2 في الخانة المُتبقِّية من منطقة العمل. وبما أنَّني لم أحصل على قيمة مُسـاوِية للحدِّ الأخير (الثابت) في المقسوم، فهذا يعني أنَّني بحاجة إلى إضافة العدد 5 فـي خانة الباقي؛ لأنَّ ناتج جمعه إلى العدد -2 يسـاوي (3)، وهو الحدُّ الأخير (الثابت) في المقسوم، عندئذٍ يكون باقي القسمة 5

×	$3x^2$	$2x$	1	
$3x$	$9x^3$	$6x^2$	$3x$	5 ← الباقي
-2	$-6x^2$	$-4x$	-2	

إذن، ناتج القسمة هو: $3x^2 + 2x + 1$، والباقي 5، ويُمكِنني كتابة ذلك كما يأتي:

$$\frac{9x^3 - x + 3}{3x - 2} = 3x^2 + 2x + 1 + \frac{5}{3x - 2}$$

أتحقَّق من صِحَّة الحلِّ:

يُمكِننـي التحقُّق مـن صِحَّة الحلِّ بإيجاد مجمـوع الحدود في منطقة العمـل، والتحقُّق من مساواتها للمقسوم.

$$9x^3 - 6x^2 + 6x^2 - 4x + 3x - 2 + 5 = 9x^3 - x + 3$$

أتحقَّق من فهمي

أستعمل طريقة الجدول لإيجاد ناتج كلٍّ ممّا يأتي:

a) $(x^3 + 6x^2 - 9x - 14) \div (x + 1)$

b) $(2x^3 - x^2 + 3) \div (x - 3)$

أتعلَّم

مجموع الحدود في منطقة العمل يساوي المقسوم.

أتعلَّم

بما أنَّ المقسوم كثير حدود من الدرجة 3، والمقسوم عليه كثير حدود درجته 1، فإنَّ باقي القسمة من الدرجة 0، وناتج القسمة من الدرجة 2

نظرية الباقي

أُلاحِظ ممّا سبق أنَّه يُمكِن إيجاد باقي قسمة كثير حدود، مثل: $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5$ على كثير حدود من الدرجة 1، مثل: $(x-3)$ بطريقتين:

الطريقة 1: القسمة الطويلة.

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2 - x - 3 \\ \hline x-3 & 2x^3 - 7x^2 + 0x + 5 \\ (-) & 2x^3 - 6x^2 \\ \hline & \quad -x^2 + 0x \\ & \quad -x^2 + 3x \\ \hline & \qquad -3x + 5 \\ & \qquad -3x + 9 \\ \hline & \qquad\quad \boxed{-4} \end{array}$$

الطريقة 2: طريقة الجدول.

$\times$	$2x^2$	$-x$	-3	
x	$2x^3$	$-x^2$	$-3x$	-4
-3	$-6x^2$	$3x$	9	

الباقي

ولكنْ، هل يُمكِن إيجاد باقي قسمة كثير حدود على كثير حدود من الدرجة 1 بطريقة أبسط؟

في المثال أعلاه، أُقارِن بين باقي القسمة، وهو (-4)، وقيمة $P(3)$:

كثير الحدود المعطى	$P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5$
بتعويض $x = 3$	$P(3) = 2(3)^3 - 7(3)^2 + 5$
بالضرب	$= 54 - 63 + 5$
بالتبسيط	$= -4$

أُلاحِظ أنَّ قيمة $P(3)$ تساوي باقي قسمة كثير الحدود $P(x)$ على $(x-3)$، وهذا يقودنا إلى **نظرية الباقي** (remainder theorem).

مفهوم أساسي

نظرية الباقي

باقي قسمة كثير الحدود $P(x)$ على $(x - c)$ هو $P(c)$.

بوجه عام، فإنَّ باقي قسمة $P(x)$ على $(ax-b)$ هو $P(\frac{b}{a})$، حيث: $a \neq 0$.

أتذكَّر

إذا كان $f(x),\ h(x)$ كثيري حدود، وكان ناتج قسمة $f(x)$ على $h(x)$ هو $Q(x)$ والباقي $R(x)$، فإنَّ:

$f(x) = Q(x)h(x) + R(x)$

وتكون درجة $R(x)$ أقل من درجة $h(x)$.

مثال 2

أستعمل نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة $\boldsymbol{P(x)}$ على $\boldsymbol{h(x)}$ في كلٍّ ممّا يأتي:

1 $\boldsymbol{P(x) = x^3 + 7x^2 - 6x + 2,\ h(x) = x - 3}$

باقي قسمة $P(x)$ على $h(x) = (x-3)$ هو $P(3)$:

$P(x) = x^3 + 7x^2 - 6x + 2$ كثير الحدود المعطى

$P(3) = (3)^3 + 7(3)^2 - 6(3) + 2$ بتعويض $x = 3$

$= 27 + 63 - 18 + 2$ بالضرب

$= 74$ بالتبسيط

إذن، باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ يساوي 74

2 $\boldsymbol{P(x) = 2x^4 - 5x^2 - 4x + 9,\ h(x) = x + 2}$

لإيجاد باقي قسمة $P(x)$ على $h(x) = x + 2$، أكتب $h(x)$ في صورة: $h(x) = x - (-2)$ ليكون الباقي $P(-2)$:

$P(x) = 2x^4 - 5x^2 - 4x + 9$ كثير الحدود المعطى

$P(-2) = 2(-2)^4 - 5(-2)^2 - 4(-2) + 9$ بتعويض $x = -2$

$= 32 - 20 + 8 + 9$ بالضرب

$= 29$ بالتبسيط

إذن، باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ يساوي 29

3 $\boldsymbol{P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 1,\ h(x) = 2x - 1}$

لإيجاد باقي قسمة $P(x)$ على $h(x) = 2x - 1$، أكتب $h(x)$ في صورة: $h(x) = 2(x - \frac{1}{2})$ ليكون الباقي $P(\frac{1}{2})$:

$P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 1$ كثير الحدود المعطى

$P(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2})^3 - 4(\frac{1}{2})^2 - 2(\frac{1}{2}) + 1$ بتعويض $x = \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{4} - 1 - 1 + 1$ بالضرب

$= -\frac{3}{4}$ بالتبسيط

إذن، باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ يساوي $-\frac{3}{4}$

أتحقَّق من فهمي

أستعمل نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $P(x) = 4x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 2,\ h(x) = x-1$

b) $P(x) = 3x^3 + 8x^2 - 3x - 6,\ h(x) = x+3$

c) $P(x) = -2x^3 - 5x^2 + 10x + 9,\ h(x) = 2x + 8$

نظرية العوامل

إذا كان باقي قسمة كثير الحدود $f(x)$ على $(x-k)$ يساوي 0، فإنَّ:

$$\frac{f(x)}{x-k} = q(x)$$

حيث $q(x)$ كثير الحدود الناتج من القسمة. ومنه، فإنَّ:

$$f(x) = (x-k)\ q(x)$$

أيْ إنَّ $(x-k)$ عامل من عوامل $f(x)$، وهذا يُوضِّح **نظرية العوامل** (factor theorem) التي تُعَدُّ حالة خاصة من نظرية الباقي.

مفهوم أساسي — نظرية العوامل

يكون $(x-c)$ عاملًا من عوامل $P(x)$ إذا وفقط إذا كان: $P(c) = 0$.

بوجه عام، يكون $(ax-b)$ عاملًا من عوامل $P(x)$ إذا وفقط إذا كان: $P\left(\frac{b}{a}\right) = 0$، حيث: $a \neq 0$.

إذا عُلِم أحد عوامل كثير الحدود، فإنَّه يُمكِن تحليله تحليلًا كاملًا، وذلك بكتابته في صورة حاصل ضرب مجموعة من كثيرات الحدود التي لا يُمكِن تحليلها.

مثال 3

إذا كان: $P(x) = x^3 + 6x^2 + 5x - 12$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين:

1 أُبيِّن أنَّ $(x+4)$ عامل من عوامل $P(x)$.

يكون $(x+4)$ عاملًا من عوامل $P(x)$ إذا كان: $P(-4) = 0$؛ لذا أجد $P(-4)$.

كثير الحدود المعطى	$P(x) = x^3 + 6x^2 + 5x - 12$
بتعويض $x = -4$	$P(-4) = (-4)^3 + 6(-4)^2 + 5(-4) - 12$
بالضرب	$= -64 + 96 - 20 - 12$
بالتبسيط	$= 0$

إذن، $(x+4)$ عامل من عوامل $P(x)$.

2 **أُحلِّل $P(x)$ تحليلًا كاملًا.**

بما أنَّ $(x+4)$ عامل من عوامل $P(x)$، فإنَّه يُمكِن إيجاد العوامل الأُخرى بقسمة $P(x)$ على $(x+4)$، ثمَّ تحليل كثير الحدود الناتج (إنْ أمكن):

$\times$	x^2	$2x$	-3	
x	x^3	$2x^2$	$-3x$	0
$+4$	$4x^2$	$8x$	-12	

كثير الحدود المعطى	$P(x) = x^3 + 6x^2 + 5x - 12$
التحليل باستعمال القسمة	$= (x+4)(x^2 + 2x - 3)$
بتحليل ثلاثي الحدود	$= (x+4)(x+3)(x-1)$

إذن، $P(x) = (x+4)(x+3)(x-1)$.

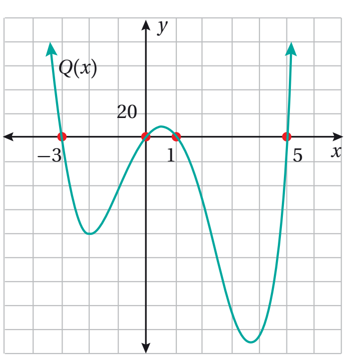
أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $P(x) = x^3 - 2x^2 - 13x - 10$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين:

a) أُبيِّن أنَّ $(x-5)$ عامل من عوامل $P(x)$. **b)** أُحلِّل $P(x)$ تحليلًا كاملًا.

الأصفار النسبية

أصفار **كثير الحدود** (zeros of a polynomial) هي قِيَم x التي يكون عندها $P(x) = 0$. وعند تمثيل كثير الحدود بيانيًّا، فإنَّ أصفاره هي إحداثيات x لنقاط تقاطع منحناه مع المحور x. فمثلًا، لكثير الحدود $Q(x)$ المعطى تمثيله البياني جانبًا، توجد 4 أصفار، هي: $-3, 0, 1, 5$، ويقطع عندها منحناه المحور x.



يُمكِن استعمال **نظرية الأصفار النسبية** (rational zero theorem) لإيجاد بعض الأصفار المُحتمَلة لكثيرات الحدود؛ بُغْيَةَ اختبارها.

مفهوم أساسي

نظرية الأصفار النسبية

إذا كان: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ كثير حدود معاملاته **أعداد صحيحة**، فإنَّ كل صفر نسبي لـ $P(x)$ يكون في صورة $\frac{p}{q}$، حيث p أحد عوامل الحدِّ الثابت (a_0)، و q أحد عوامل المعامل الرئيس (a_n).

نتيجة من نظرية الأصفار النسبية

إذا كان: $a_n = 1$، فإنَّ كل صفر نسبي لـ $P(x)$ يكون أحد عوامل الحدِّ الثابت (a_0).

أفكر

لماذا يكون عدد أصفار كثير الحدود أقل من أو يساوي درجته؟ أبرّر إجابتي.

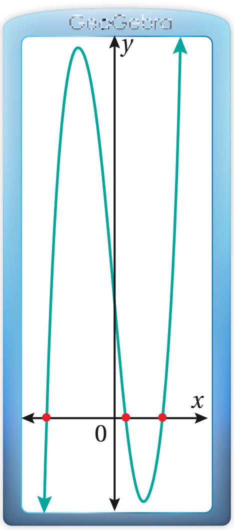
عند إيجاد أحد الأصفار النسبية لكثير الحدود، فإنَّه يُمكِن إيجاد أصفاره الأُخرى باستعمال القسمة والتحليل.

مثال 4

1 أجد جميع أصفار كثير الحدود: $P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$.

الدعم البياني

يُمكِنني استعمال برمجية جيوجبرا لتمثيل $P(x)$ بيانيًّا وتحديد عدد أصفاره. أُلاحِظ أنَّ منحنى $P(x)$ يقطع محور x في 3 نقاط؛ ما يعني أنَّ $P(x)$ له 3 أصفار، ويُمكِنني التحقُّق من ذلك جبريًّا.



الخطوة 1: أجد الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود.

أجد عوامل الحدِّ الثابت (6)، وهي: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$

أجد عوامل المعامل الرئيس (2)، وهي: $\pm1, \pm2$

إذن، الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود $P(x)$ هي:

$$\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$$

أتذكَّر

لإيجاد الأصفار النسبية المُحتمَلة، أَقسِم عوامل الحدِّ الثابت على عوامل المعامل الرئيس، ثمَّ أكتب الأصفار النسبية المُحتمَلة في أبسط صورة.

الخطوة 2: أُنشِئ جدولًا لاختبار بعض الأصفار النسبية المُحتمَلة.

$\frac{p}{q}$	$P\left(\frac{p}{q}\right)$	هل $\frac{p}{q}$ صفر لكثير الحدود؟
-1	$P(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 13(-1) + 6 = 18$	✗
1	$P(1) = 2(1)^3 + (1)^2 - 13(1) + 6 = -4$	✗
2	$P(2) = 2(2)^3 + (2)^2 - 13(2) + 6 = 0$	✓

أتعلَّم

أتوقَّف عن التعويض عندما أجد أوَّل صفر لكثير الحدود.

بما أنَّ: $P(2) = 0$، فإنَّه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $x = 2$. إذن، $(x-2)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة 3: أُحلِّل كثير الحدود تحليلًا كاملًا.

بما أنَّ $(x-2)$ عامل من عوامل $P(x)$، فإنَّه يُمكِن إيجاد العوامل الأُخرى بقسمة $P(x)$ على $(x-2)$ ثمَّ تحليل كثيــر الحدود الناتج (إنْ أمكن).

$\times$	$2x^2$	$5x$	-3	
x	$2x^3$	$5x^2$	$-3x$	0
-2	$-4x^2$	$-10x$	6	

ناتج القسمة يساوي $(2x^2 + 5x - 3)$. ومنه، يُمكِن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

$$P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6 \quad \text{كثير الحدود المعطى}$$

$$= (x-2)(2x^2 + 5x - 3) \quad \text{التحليل باستعمال القسمة}$$

$$= (x-2)(2x-1)(x+3) \quad \text{بتحليل ثلاثي الحدود}$$

إذن، $P(x) = (x-2)(2x-1)(x+3)$.

ومنه، فإنَّ أصفار $P(x)$ الناتجة من تحليله هي: $2, \frac{1}{2}, -3$

أتعلَّم

أجد أصفار كثير الحدود بمســاواة كل عامــل من عوامله بالصفر:

$x-2 = 0 \rightarrow x = 2$

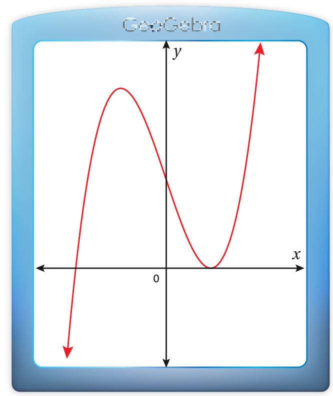
$2x-1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

$x+3 = 0 \rightarrow x = -3$

2 **أجد جميع أصفار كثير الحدود: $P(x) = x^3 - 3x + 2$.**

الدعم البياني

يُمكِنني استعمال برمجية جيوجبرا لتمثيل $P(x)$ بيانيًّا وتحديد عدد أصفاره. أُلاحِظ أنَّ منحنى كثير الحدود يقطع محور x في نقطتين؛ ما يعني أنَّ $P(x)$ له صفران، ويُمكِنني التحقُّق من ذلك جبريًّا.



الخطوة 1: أجد الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود.

بمــا أنَّ معامل الحدِّ الرئيس 1، فإنَّ الأصفار النســبية المُحتمَلة هي عوامل الحدِّ الثابت الذي يساوي (2).

إذن، الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود $P(x)$ هي:

$$\pm 1, \pm 2$$

الخطوة 2: أُنشِئ جدولًا لاختبار بعض الأصفار النسبية المُحتمَلة.

p	$P(p)$	هل p صفر لكثير الحدود؟
-1	$P(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4$	✗
1	$P(1) = (1)^3 - 3(1) + 2 = 0$	✓

بمــا أنَّ: $P(1) = 0$، فإنَّـه يوجـد لكثيـر الحـدود صفـر عندمـا $x = 1$. إذن، $(x-1)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة 3: أُحلِّل كثير الحدود تحليلًا كاملًا.

بما أنَّ $(x-1)$ عامل من عوامل $P(x)$، فإنَّه يُمكِن إيجاد العوامل الأُخرى بقسمة $P(x)$ على $(x-1)$ ثمَّ تحليل كثير الحدود الناتج (إنْ أمكن):

$\times$	x^2	x	-2	
x	x^3	x^2	$-2x$	0
-1	$-x^2$	$-x$	2	

ناتج القسمة يساوي $(x^2 + x - 2)$. ومنه، يُمكِن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

$P(x) = x^3 - 3x + 2$ كثير الحدود المعطى

$= (x-1)(x^2 + x - 2)$ التحليل باستعمال القسمة

$= (x-1)(x+2)(x-1)$ بتحليل ثلاثي الحدود

إذن، $P(x) = (x+2)(x-1)(x-1)$.

ومنه، فإنَّ أصفار $P(x)$ الناتجة من تحليله هي: $-2, 1$

أتعلَّم

إنَّ عدم وجود أصفار نسبية لكثير الحدود لا يعني أنْ ليس له أصفار، وإنَّما يعني أنَّ هذه الأصفار هي أعداد غير نسبية.

أتحقَّق من فهمي

أجد جميع أصفار كثير الحدود في ما يأتي:

a) $P(x) = 5x^3 - x^2 - 5x + 1$

b) $Q(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8$

حلُّ معادلات كثيرات الحدود

معادلة كثير الحدود (polynomial equation) هي معادلة يُمكِن كتابتها في صورة: $P(x) = 0$، حيث $P(x)$ كثير حدود من أيِّ درجة، ويُسمّى كثير الحدود المرتبط بالمعادلة. يُمكِن حلُّ بعض معادلات كثيرات الحدود باستعمال طرائق التحليل البسيطة التي تعلَّمْتُها سابقًا، مثل التحليل بإخراج عامل مشترك أو باستعمال التجميع، لكنَّ بعض معادلات كثيرات الحدود لا يُمكِن حلُّها باستعمال هذه الطرائق، عندئذٍ يُمكِن استعمال نظرية الأصفار النسبية لتحليل كثير الحدود المرتبط بالمعادلة، ثمَّ حلِّ المعادلة.

أتعلَّم

المعادلات الخطِّية والتربيعية والتكعيبية التي تعلَّمْتُها سابقًا هي حالات خاصة من معادلة كثير الحدود.

مثال 5

أحُلُّ المعادلة: $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$.

كثيـــر الحدود المرتبط بالمعادلة هو: $P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$. وبما أنَّه لا توجد طريقة واضحة لتحليله، مثل إخراج العامل المشـــترك أو استعمال التجميع، فإنَّني أجد أحد أصفاره النسبية، ثمَّ أُحلِّله.

الخطوة 1: أجد الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود المرتبط بالمعادلة.

بمـــا أنَّ معامل الحدِّ الرئيس هو (1)، فإنَّ الأصفار النســـبية المُحتمَلة هي عوامل الحدِّ الثابت الذي يساوي (24).

إذن، الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود $P(x)$ هي:

$$\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24$$

الخطوة 2: أُنشِئ جدولًا لاختبار بعض الأصفار النسبية المُحتمَلة.

p	$P(p)$	هل p صفر لكثير الحدود؟
1	$P(1) = (1)^3 - (1)^2 - 14(1) + 24 = 10$	✗
2	$P(2) = (2)^3 - (2)^2 - 14(2) + 24 = 0$	✓

بمـــا أنَّ: $P(2) = 0$، فإنَّـــه يوجـــد لكثيـــر الحـــدود صفـــر عندمـــا $x = 2$. إذن، $(x-2)$ عامـــل مـــن عوامـــل $P(x)$.

الخطوة 3: أُحلِّل كثير الحدود باستعمال الأصفار النسبية، ثمَّ أَحُلُّ المعادلة.

بما أنَّ $(x-2)$ أحد عوامل كثير الحدود، فإنَّه يُمكِن إيجاد العوامل الأُخرى بقسمة $P(x)$ على $(x-2)$، ثمَّ تحليل كثير الحدود الناتج (إنْ أمكن):

$\times$	x^2	x	-12	
x	x^3	x^2	$-12x$	0
-2	$-2x^2$	$-2x$	24	

ناتج القسمة يساوي $(x^2 + x - 12)$. ومنه، يُمكِن تحليل كثير الحدود، وحلُّ المعادلة كما يأتي:

$$x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$$ المعادلة الأصلية

$$(x-2)(x^2 + x - 12) = 0$$ التحليل باستعمال القسمة

$$(x-2)(x+4)(x-3) = 0$$ بتحليل ثلاثي الحدود

$$x-2 = 0 \quad \text{or} \quad x+4 = 0 \quad \text{or} \quad x-3 = 0$$ خاصية الضرب الصفري

$$x = 2 \qquad x = -4 \qquad x = 3$$ بحلِّ كل معادلة

إذن، حلول المعادلة هي: $x = 2, x = -4, x = 3$.

أتحقَّق من فهمي أَحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي:

a) $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$

b) $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

أتدرّب وأحلّ المسائل

أستعمل طريقة الجدول لإيجاد ناتج القسمة والباقي في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $(6x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 12) \div (3x - 4)$

2) $(2x^5 - 5x^4 + 9x^2 - 10x + 15) \div (1 - 2x)$

أستعمل نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة $f(x)$ على $h(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

3) $f(x) = 8x^4 + 2x^3 - 53x^2 + 37x - 6,\ h(x) = x + 1$

4) $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 6x - 8,\ h(x) = 3x + 4$

أُبيِّن أنَّ $h(x)$ عامل من عوامل $f(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

5) $f(x) = x^3 - 37x + 84,\ h(x) = x + 7$

6) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6,\ h(x) = 2x - 3$

أُحلِّل كل اقتران ممّا يأتي تحليلًا كاملًا:

7) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 13x - 15$

8) $g(x) = x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18$

9) $h(x) = 2x^3 - 13x^2 + 17x + 12$

10) $q(x) = 3x^3 - 18x^2 + 2x - 12$

أَحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية:

11) $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$

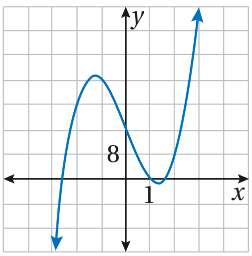
12) $5x^3 - 15x^2 - 47x - 15 = 2x^3 - 10x^2$

13) $3x^3 + 3x^2 - 14x - 8 = 0$

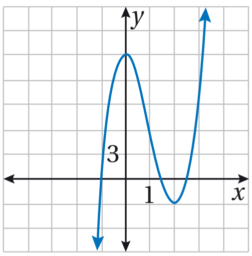
14) $6x^3 - 13x^2 + x + 2 = 0$

أستعمل التمثيل البياني لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي لإيجاد أحد أصفاره النسبية، ثمَّ إيجاد جميع أصفار الاقتران:

15) $f(x) = 4x^3 - 20x + 16$



16) $f(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + 15$



17) إذا كان: $x = 1, x = 4$ هما حلّين للمعادلة: $x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$، فأجد الحلَّ الثالث لها.

18) إذا كان باقي قسمة: $f(x) = x^3 + ax^2 + x + 5$ على $x - 1$ يساوي مثلي باقي قسمته على $x + 1$، فما قيمة a؟

إذا كان: $f(x) = ax^3 + bx^2 - 9x - 9$، حيث: a, b ثابتان، و $a, b \neq 0$، فأُجيب عن الأسئلة الآتية:

19) إذا كان $(x - 3)$ عاملًا من عوامل الاقتران $f(x)$، فأُبيِّن أنَّ: $3a + b = 4$

20) إذا كان باقي قسمة $f(x)$ على $x - 2$ يساوي -15، فأُبيِّن أنَّ: $2a + b = 3$

21) أجد قيمة كلٍّ من a، و b.

22) أَحُلُّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

مهارات التفكير العليا

23) **مسألة مفتوحة:** أكتب اقترانًا من الدرجة الثالثة يكون $(x-3)$ أحد عوامله، ويكون باقي قسمته على $(x + 1)$ يساوي -8

24) **أكتشف الخطأ:** أرادت سهام إيجاد الأصفار النسبية المُحتمَلة للاقتران:
$f(x) = -8x^6 + 7x^5 - 3x^4 + 45x^3 - 1500x^2 + 16x$، فكان حلُّها كالآتي:

$$f(x) = -8x^6 + 7x^5 - 3x^4 + 45x^3 - 1500x^2 + 16x$$

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{16}, \pm \frac{1}{8} \quad ✗$$

أُبيِّن الخطأ الذي وقعت فيه سهام، ثمَّ أُصحِّحه.

25) **تحدٍّ:** إذا كان باقي قسمة كثير الحدود $f(x)$ على $(x - 3)$ يساوي 4، وباقي قسمته على $(x + 2)$ يساوي 9، فأجد باقي قسمة $f(x)$ على $(x - 3)(x + 2)$.

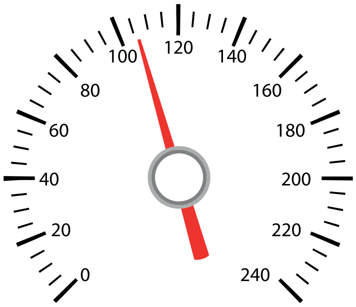
الدرس 4

الكسور الجزئية
Partial Fractions

فكرة الدرس كتابة المقدار الجبري النسبي الذي يُمكِن تحليل مقامه في صورة مجموع مقادير جبرية نسبية أبسط.

المصطلحات تجزئة المقادير النسبية، كسر جزئي.

مسألة اليوم يُمثِّل الاقتــران: $v = \frac{t^2 - 5t + 6}{(t+2)(t^2-1)}$ العلاقة بين ســرعة ســيّارة v بالكيلومتر لكل ســاعة والزمن t بالساعات. هل يُمكِن كتابة الاقتــران v في صورة مجموع مقدارين جبريين نسبيين، مقام أحدهما $(t+2)$، ومقام الآخر (t^2-1)؟



تعلَّمْتُ ســابقًا أنَّ المقــدار الجبــري النســبي هــو مقدار جبــري يُمكِــن كتابته في صورة كســر بســطه ومقامه كثيــرا حــدود، وتعلَّمْتُ أيضًــا أنَّه عند جمــع مقدارين نســبيين مختلفــي المقام أو طرحهمــا، فإنَّــه يجــب أوَّلًا توحيــد مقاميهمــا باســتعمال المضاعــف المشــترك الأصغر (م. م. أ) للمقاميــن كمــا يأتي:

$$\frac{3}{x-4} - \frac{2}{x+2} = \frac{3(x+2)}{(x-4)(x+2)} - \frac{2(x-4)}{(x+2)(x-4)}$$ بتوحيد المقامين

$$= \frac{3x+6-2x+8}{(x-4)(x+2)}$$ بطرح البسطين

$$= \frac{x+14}{(x-4)(x+2)}$$ بالتبسيط

إرشاد

يشــير مصطلح المقدار النســبي إلــى المقــدار الجبري النسبي أينما ورد في هذه الوحدة.

تجزئة المقادير النسبية (decomposition of rational expressions) هي عملية عكسية للعملية الســابقة، ينتج منها كتابة المقدار النسبي في صورة مجموع مقادير جبرية نسبية، يُبسَّط كلٌّ منها في صورة $\frac{P(x)}{Q(x)}$، حيث P و Q كثيرا حدود لا يوجد بينهما عوامل مشتركة، ودرجة P أقل من درجة Q، ويُسمّى كلٌّ من هذه المقادير النسبية **كسرًا جزئيًّا** (partial fraction).

$$\underbrace{\frac{x+14}{(x-4)(x+2)}}_{\text{تجزئة المقدار النسبي}} = \overbrace{\frac{3}{x-4}}^{\text{كسر جزئي}} + \overbrace{\frac{-2}{x+2}}^{\text{كسر جزئي}}$$

تعتمد عمليـــة تجزئة المقادير الجبرية النســـبية على عوامل المقام. ســـأتعلَّم في هذا الدرس حالتين مختلفتين من التجزئة تبعًا لنوع عوامل المقام، وهما:

- عوامل المقام كثيرات حدود خطِّية مختلفة.
- عوامل المقام كثيرات حدود، أحدها تربيعي غير مُكرَّر، ولا يُمكِن تحليله (مُميِّزه سالب).

تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود خطِّية مختلفة

إذا كانت جميع عوامل كثير الحدود في مقام المقدار النسبي خطِّية، فإنَّه ينتج من كلٍّ منها كسر جزئي بسطه ثابت ومقامه العامل الخطِّي في الصورة الآتية:

$$\frac{\overbrace{A}^{\text{ثابت}}}{\underbrace{ax+b}_{\text{عامل خطِّي}}}$$

مفهوم أساسي **تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود خطِّية مختلفة**

إذا كان $Q(x)$ كثير حدود يُمكِن تحليله تحليلًا كاملًا من دون تكرار أيِّ عامل في الصورة الآتية:

$$Q(x) = (a_1 x + b_1)(a_2 x + b_2)(a_3 x + b_3)\ldots(a_n x + b_n)$$

فإنَّه يُمكِن تجزئة المقدار الجبري النســـبي $\frac{P(x)}{Q(x)}$، حيث درجة P أقل من درجة Q، في الصورة الآتية:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \frac{A_3}{a_3x+b_3} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

مثال 1

أُجزِّئ $\frac{2x-13}{x^2-x-2}$ إلى كسور جزئية.

الخطوة 1: أُحلِّل المقام تحليلًا كاملًا.

$$\frac{2x-13}{x^2-x-2}=\frac{2x-13}{(x-2)(x+1)}$$ بتحليل ثلاثي الحدود

الخطوة 2: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تُمثِّل قِيَمًا مجهولةً.

أكتب كسرين جزئيين مقاماهما العاملان الخطِّيان في مقام الكسر النسبي الأصلي، ثمَّ أكتب رمزًا في بسط كل كسر:

$$\frac{2x-13}{(x-2)(x+1)}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x+1)}$$

الخطوة 3: أضرِب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامي الكسرين الجزئيين.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامي الكسرين الجزئيين، وهو $(x-2)(x+1)$، فإنَّ:

$$(x-2)(x+1)\frac{2x-13}{(x-2)(x+1)}=(x-2)(x+1)\left(\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x+1)}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع في الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$2x-13=A(x+1)+B(x-2)$$

الخطوة 4: أجد قيمة كلٍّ من الثابت A والثابت B باستعمال التعويض.

- بتعويض $x=2$ في المعادلة الناتجة:

$$2(2)-13=A(2+1)+B(2-2)$$ بتعويض $x=2$

$$-9=3A$$ بالتبسيط

$$A=-3$$ بقسمة طرفي المعادلة على 3

أتعلَّم

تعويض $x=2$ يحذف المُتغيِّر B، ويجعل المعادلة بمُتغيِّر واحد، وهو A؛ ما يجعل إيجاد قيمته مُمكِنًا.

أتعلَّم

تعويض $x=-1$ يحذف المُتغيِّر A، ويجعل المعادلة بمُتغيِّر واحد، وهو B؛ ما يجعل إيجاد قيمته مُمكِنًا.

- بتعويض $x=-1$ في المعادلة الناتجة:

بتعويض $x=-1$ $\quad 2(-1)-13=A(-1+1)+B(-1-2)$

بالتبسيط $\quad -15=-3B$

بقسمة طرفي المعادلة على -3 $\quad B=5$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{2x-13}{(x-2)(x+1)}=\frac{-3}{(x-2)}+\frac{5}{(x+1)}$$

أتحقَّق من فهمي

أُجزِّئ كل مقدار نسبي ممّا يأتي إلى كسور جزئية:

a) $\dfrac{x}{x^2-5x+6}$ $\qquad$ b) $\dfrac{x+10}{x^2+2x-8}$

تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود، أحدها تربيعي غير مُكرَّر، ولا يُمكِن تحليله

تعلَّمْتُ في المثال السابق تجزئة مقادير نسبية، جميع عوامل مقاماتها كثيرات حدود خطِّية. ولكنْ في بعض الحالات، قد يحوي تحليل المقام عاملًا تربيعيًّا لا يُمكِن تحليله، عندئذٍ ينتج من العامل التربيعي كسر جزئي بسطه كثير حدود خطِّي في صورة $Ax+B$، ومقامه العامل التربيعي.

مفهوم أساسي

تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود، أحدها تربيعي غير مُكرَّر، ولا يُمكِن تحليله

إذا كان $\frac{P(x)}{Q(x)}$ مقدارًا جبريًّا نسبيًّا، وكان التحليل الكامل لـ $Q(x)$ يحتوي على عامل تربيعي غير مُكرَّر، ولا يُمكِن تحليله وهو (ax^2+bx+c)، ودرجة P أقل من درجة Q، فإنَّ تجزئة $\frac{P(x)}{Q(x)}$ تتضمَّن الحدَّ $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$

مثال 2

أُجزِّئ $\frac{x^2-3x+16}{x^3+x^2+9x+9}$ إلى كسور جزئية.

الخطوة 1: أُحلِّل المقام تحليلًا كاملًا.

$$\frac{x^2-3x+16}{x^3+x^2+9x+9}=\frac{x^2-3x+16}{(x+1)(x^2+9)}$$ بتحليل كثير الحدود باستعمال الأصفار النسبية

بما أنَّ المقدار النسبي يحتوي في مقامه على عامل تربيعي لا يُمكِن تحليله، فإنَّ بسط أحد الكسور الجزئية سيكون ثابتًا، وبسط الآخر سيكون مقدارًا خطِّيًّا.

الخطوة 2: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال ثوابت غير معروفة، فأكتب ثابتًا في بسط العامل الخطِّي، ومقدارًا خطِّيًّا في بسط العامل التربيعي.

$$\frac{x^2-3x+16}{(x+1)(x^2+9)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{(x^2+9)}$$

الخطوة 3: أضرِب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامي الكسرين الجزئيين.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامي الكسرين الجزئيين، وهو $(x+1)(x^2+9)$، فإنَّ:

$$(x+1)(x^2+9)\,\frac{x^2-3x+16}{(x+1)(x^2+9)}=(x+1)(x^2+9)\left(\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{(x^2+9)}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$x^2-3x+16=A(x^2+9)+(Bx+C)(x+1)$$

الخطوة 4: أجد قيمة كلٍّ من الثوابت A وB وC باستعمال التعويض.

- بتعويض $x=-1$ في المعادلة الناتجة:

$$(-1)^2-3(-1)+16=A((-1)^2+9)+(B(-1)+C)(-1+1)$$ بتعويض $x=-1$

$$20=10A$$ بالتبسيط

$$A=2$$ بقسمة طرفي المعادلة على 10

- بتعويض $x=0$ وقيمة A في المعادلة الناتجة:

$$(0)^2-3(0)+16=2((0)^2+9)+(B(0)+C)(0+1)$$ بتعويض $x=0, A=2$

$$16=18+C$$ بالتبسيط

$$C=-2$$ بطرح 18 من طرفي المعادلة

أفكّر

بكم طريقة يمكن تحليل المقام في المثال 2؟

• بتعويض أيِّ قيمة أُخرى للمُتغيِّر x (مثل: $x = 1$) في المعادلة الناتجة، إضافةً إلى تعويض قيمتي A و C الناتجتين:

بتعويض $x = 1$, $A = 2, C = -2$	$(1)^2 - 3(1) + 16 = 2((1)^2 + 9) + (B(1) + (-2))(1 + 1)$
بالتبسيط	$14 = 2B + 16$
بطرح 16 من طرفي المعادلة	$-2 = 2B$
بقسمة طرفي المعادلة على 2	$B = -1$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{x^2 - 3x + 16}{(x+1)(x^2+9)} = \frac{2}{x+1} + \frac{-x-2}{(x^2+9)}$$

أتحقَّق من فهمي

أُجزِّئ $\frac{18 - 7x}{x^3 - 2x^2 - 2x - 3}$ إلى كسور جزئية.

تجزئة مقدار نسبي، درجة كثير الحدود في بسطه مُساوِية لدرجة كثير الحدود في مقامه أو أكبر منها

تعلَّمْتُ في الأمثلة السابقة تجزئة مقادير نسبية مختلفة في صورة $\frac{P(x)}{Q(x)}$، حيث P و Q كثيرا حدود، ولا يوجد بينهما عوامل مشتركة، ودرجة P أقل من درجة Q. ولكنْ، إذا كانت درجة P مُساوِية لدرجة Q أو أكبر منها، فيجب أوَّلًا تجهيز المقدار النسبي باستعمال القسمة الطويلة، وذلك بقسمة P على Q.

مثال 3

أُجزِّئ $\frac{2x^2 + 13x + 6}{x^2 + 6x - 16}$ إلى كسور جزئية.

بما أنَّ درجة البسط مُساوِية لدرجة المقام، فإنَّني أَقسِم أوَّلًا البسط على المقام، ثمَّ أُجزِّئ.

الخطوة 1: أَقسِم البسط على المقام باستعمال القسمة الطويلة، ثمَّ أكتب الكسر في صورة مجموع ناتج القسمة مع كسر يُمثِّل باقي القسمة.

$$\begin{array}{r|l} & \quad\quad\quad\quad 2 \\ x^2+6x-16 & \overline{)\,2x^2+13x+6} \\ & (-)\ 2x^2+12x-32 \\ \hline & \quad\quad\quad x+38 \end{array}$$

إذن، ناتج القسمة 2، والباقي $x + 38$. ومنه، فإنَّ:

$$\frac{2x^2+13x+6}{x^2+6x-16} = 2 + \frac{x+38}{x^2+6x-16}$$

الخطوة 2: أُحلِّل مقام باقي القسمة تحليلًا كاملًا، وأبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تُمثِّل قِيَمًا مجهولةً.

أكتب كسرين جزئيين مقاماهما عوامل مقام الكسر النسبي الأصلي، ثمَّ أكتب رمزًا في بسط كلٍّ منهما:

$$\frac{x+38}{x^2+6x-16} = \frac{x+38}{(x+8)(x-2)}$$

$$\frac{x+38}{(x+8)(x-2)} = \frac{A}{x+8} + \frac{B}{x-2}$$

الخطوة 3: أضرِب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر للمقام.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) للمقام، وهو $(x+8)(x-2)$، فإنَّ:

$$(x+8)(x-2)\,\frac{x+38}{(x+8)(x-2)} = (x+8)(x-2)\left(\frac{A}{x+8} + \frac{B}{x-2}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$x + 38 = A(x-2) + B(x+8)$$

الخطوة 4: أجد قيمة كلٍّ من الثابت A والثابت B باستعمال التعويض.

- بتعويض $x = -8$ في المعادلة الناتجة:

$$-8 + 38 = A(-8-2) + B(-8+8) \quad \text{بتعويض } x=-8$$

$$30 = -10A \quad \text{بالتبسيط}$$

$$A = -3 \quad \text{بقسمة طرفي المعادلة على } -10$$

- بتعويض $x = 2$ في المعادلة الناتجة:

$2 + 38 = A(2-2) + B(2+8)$ بتعويض $x = 2$

$40 = 10B$ بالتبسيط

$B = 4$ بقسمة طرفي المعادلة على 10

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{2x^2 + 13x + 6}{x^2 + 6x - 16} = 2 + \frac{-3}{x+8} + \frac{4}{x-2}$$

أتحقَّق من فهمي

أُجزِّئ $\frac{3x^2 + 12x + 4}{x^2 + x}$ إلى كسور جزئية.

أتدرّب وأحلّ المسائل

أُجزِّئ كُلًّا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

1) $\frac{2x - 5}{(x+2)(x+3)}$

2) $\frac{2x + 22}{x^2 + 2x}$

3) $\frac{4x - 30}{x^2 - 8x + 15}$

4) $\frac{6x^2 - 7x + 10}{(x-2)(x^2+1)}$

5) $\frac{x}{8x^2 - 10x + 3}$

6) $\frac{7x - 3}{x^2 - 2x - 8}$

7) $\frac{x - 3}{x^3 + 3x}$

8) $\frac{x^2 + 2x + 40}{x^3 - 125}$

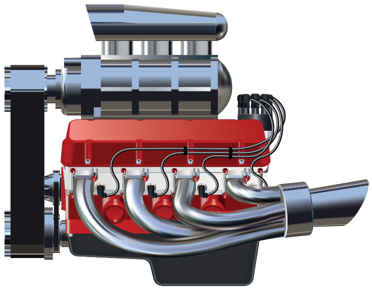
9) $\frac{x^3 + 12x^2 + 33x + 2}{x^2 + 8x + 15}$

10) $\frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 2x}$

11) $\frac{x^5 - 2x^4 + x^3 + x + 5}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$

12) $\frac{9x^2 - 9x + 6}{2x^3 - x^2 - 8x + 4}$

13 أُبيِّن أنَّه يُمكِن كتابة $\frac{1}{x^2-a^2}$ في صورة $\frac{1}{2a(x-a)} - \frac{1}{2a(x+a)}$ ، حيث a عدد حقيقي لا يساوي صفرًا.



هندسة ميكانيكية: يُستعمَل الاقتران الآتي لتقدير درجة الحرارة لعادم مُحرِّك ديزل:

$$R(x) = \frac{2000(4-3x)}{(11-7x)(7-4x)}, 0 \leq x \leq 1$$

حيث x مقدار جهد المُحرِّك، و $R(x)$ درجة الحرارة بالفهرنهايت:

14 أُجزِّئ الاقتران $R(x)$ إلى كسور جزئية.

15 إذا كان $R(x)$ يُمثِّل الفرق بين اقتران أعلى درجة حرارة للعادم واقتران أقل درجة حرارة للعادم، فأجد كُلًّا من الاقترانين، وأستعين بالسؤال السابق في عملية الحلِّ.

16 أحُلُّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

مهارات التفكير العليا

17 أكتشف الخطأ: بدأت رنيم خطوات تجزئة المقدار $\frac{x^2+3x+1}{(x+3)(x-2)}$ كالآتي:

$$\frac{x^2+3x+1}{(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2}$$

أُحدِّد الخطأ الذي وقعت فيه رنيم، ثمَّ أُصحِّحه.

تحدٍّ: أُجزِّئ كُلًّا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

19 $\frac{(x-3)^2}{x^3-16x}$

18 $\frac{3x^3+12x-20}{x^3-4x^2+8x-8}$

20 تبرير: إذا كان: $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{ax+b}{x^2-1}$ ، فأجد قيمة كلٍّ من A و B بدلالة المُتغيِّرين a و b، ثمَّ أبرِّر إجابتي.

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 إذا كان $f(x)=\begin{cases} 3x^2-4x+2 & , x<3 \\ -2x^2+5x+7 & , x\geq 3 \end{cases}$ ،

فما قيمة $f(-2)$؟

a) -18 b) -11

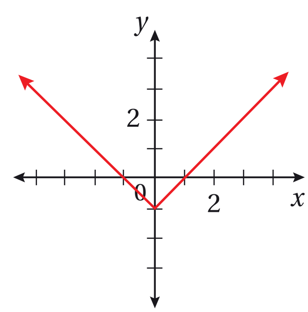
c) 11 d) 22

2 مجموعة حلّ المعادلة $|x+5|=2$، هي:

a) $\{-3, 3\}$ b) $\{-3, -7\}$

c) $\{-2, 2\}$ d) $\{3, 7\}$

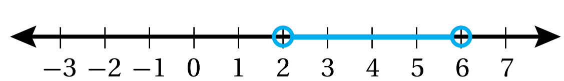
3 أيّ الاقترانات الآتية يُمثّل قاعدة المنحنى المجاور؟

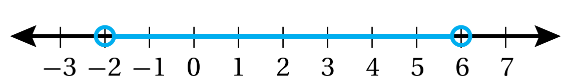


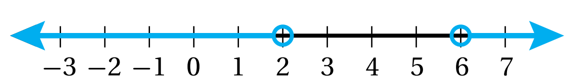
a) $g(x)=|x+1|$ b) $g(x)=|x-1|$

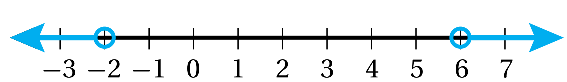
c) $g(x)=|x|-1$ d) $g(x)=-|x|$

4 التمثيل البيانيّ الّذي يمثّل مجموعة حلّ المتباينة $|x-4|>2$، هو:

a)


b)


c)


d)


5 باقي قسمة: $f(x)=x^3-2x^2-5x+9$ على $(x+2)$ يساوي:

a) 3 b) -1

c) 9 d) 27

6 إذا كان $(x-3)$ عاملًا من عوامل: $g(x)=2x^3+x^2+px-6$، فإنَّ قيمة p هي:

a) -17 b) -3

c) 10 d) -19

7 إذا كان: $\frac{1}{x+k}-\frac{2}{x-2}=\frac{x-4}{x^2-5x-2k}$ ، فـإنَّ k تساوي:

a) -3 b) -2 c) 2 d) 3

8 إذا كان: $\frac{B}{x-4}+\frac{A}{x+1}=\frac{5x-12}{x^2-3x-4}$ ، فـإنَّ قيمة $A+B$ هي:

a) -12 b) -7

c) 3 d) 5

9 إذا كان باقي قسمة كثير الحدود $f(x)$ على $(x-1)$ هو 2، وباقي قسمته على $(x-2)$ هو 5، فإنَّ باقي قسمة $f(x)$ على $(x-1)(x-2)$ هو:

a) 10 b) $1-x$

c) $2x-1$ d) $3x-1$

أُمثّل كلًّا من الاقترانين الآتيين بيانيًّا:

10 $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , x < 0 \\ -1 & , 0 \le x \le 3 \\ x^2 - 4 & , x > 3 \end{cases}$

11 $f(x) = |3x - 12| + 2$

أحُلُّ كلًّا مِنَ المُعادلاتِ والمُتبايناتِ الآتيةِ:

12 $3 - |5x + 3| > 3$

13 $7|x + 1| - 3 \le 11$

14 $-4|8 - x| + 2 > -14$

15 $|x + 5| = 6.5$

16 $|7x + 3| + 2 = 33$

17 $|x - \frac{1}{2}| = \frac{5}{2}$

أحلّل كلًّا ممّا يأتي تحليلًا كاملًا:

18 $3x^3 - 10x^2 - 9x + 4$

19 $8x^4 + 2x^3 - 53x^2 + 37x - 6$

أحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي:

20 $x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18 = 0$

21 $x^3 + 16x^2 - 3x = 5x^2 - 18x + 27$

22 إذا كان باقي قسمة كلٍّ من المقدارين:
$mx^3 + x^2 - 10x - 6$، و $2x^3 - 4x^2 + mx + 8$
على $(x-2)$ متساويًا، فأجد قيمة الثابت m.

أُجزِّئ كُلًّا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

23 $\frac{6}{(x+3)(x+1)}$

24 $\frac{5x^2 - 6}{2x^2 + x}$

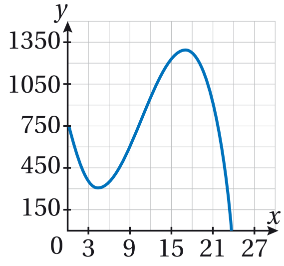
25 $\frac{3x^2 + x - 4}{x^2 - 2x}$

26 $\frac{4x^2 - x - 2}{x^3 + 2x^2}$

27 إذا كان: $\frac{b}{x-3} + \frac{9}{x-a} - = \frac{7x-5}{(x-a)(x-3)}$، فأجد قيمة كلٍّ من a، وb.

28 إذا كان العدد (-2) هو أحد حلول المعادلة: $x^3 + 5x^2 + 5x - 2 = 0$، فأجد حلولها الأُخرى.

29 أستعمل التمثيل البياني أدناه للاقتران: $f(x) = -x^3 + 32x^2 - 224x + 768$ لأُحلِّله تحليلًا كاملًا.



الوحدة 2

الاقترانات المثلثية
Trigonometric Functions

ما أهمية هذه الوحدة؟

تُعَدُّ الاقترانات المثلثية أحد أكثر فروع الرياضيات استعمالًا في العلوم المختلفة؛ إذ يُمكِن عن طريقها نمذجة كثير من الظواهر العلمية، مثل: موجات الصوت والضوء. وكذلك إيجاد ارتفاع المَدِّ والجَزْر، وإنشاء الخرائط، فضلًا عن استعمالها في أنظمة الأقمار الصناعية.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ ماهية دائرة الوحدة، والوضع القياسي للزاوية.
- ✓ إيجاد النسب المثلثية للزوايا ضمن الدورة الواحدة بالدرجات.
- ✓ تمثيل الاقترانات المثلثية $\sin x, \cos x, \tan x$ في الفترة $[0°, 360°]$ بيانيًّا في المستوى الإحداثي، واستنتاج خواصها.
- ✓ تمثيل منحنيات الاقترانات التربيعية الناتجة عن تطبيق تحويل هندسي أو أكثر على منحنى الاقتران الرئيس.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- رسم الزوايا في الوضع القياسي.
- تحويل قياس الزوايا من الدرجات إلى الراديان، وبالعكس.
- إيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية لأيِّ زاوية.
- تمثيل الاقترانات الجيبية بيانيًّا في المستوى الإحداثي، وإيجاد دورتها وسعتها ومجالها ومداها.

ملحوظة: أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (25–21) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

الدرس 1

قياس الزاوية بالراديان
Angle Measure in radian

فكرة الدرس

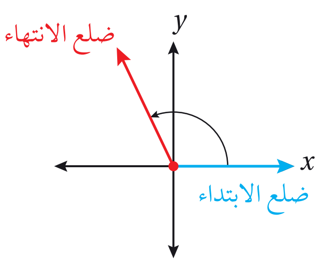
- رسم الزوايا في الوضع القياسي.
- التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان، والعكس.

المصطلحات الراديان، الزوايا المُشترِكة، السرعة الخطية، السرعة الزاويَّة.

مسألة اليوم إذا كان طول عقرب الدقائق في الساعة المجاورة 6 cm، فكيف أجد المسافة التي يقطعها رأس عقرب الدقائق بعد مرور 15 دقيقة على حركته؟ أجد المسافة بطريقتين مختلفتين.

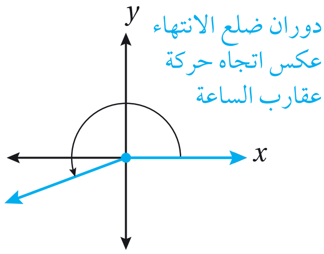
رسم الزاوية في الوضع القياسي

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ الزاوية المرسومة في الوضع القياسي في المستوى الإحداثي هي زاوية يقع رأسها عند نقطة الأصل $(0, 0)$، وضلع ابتدائها مُنطبِق على المحور x الموجب.

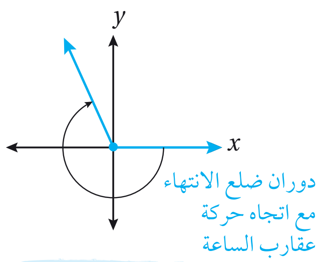


زاوية في الوضع القياسي

تعلَّمْتُ أيضًا أنَّ قياس الزاوية يصف مقدار الدوران واتجاهه اللازمينِ للانتقال من ضلع الابتداء إلى ضلع الانتهاء، وأنَّ قياس الزاوية يكون موجبًا إذا كان دوران ضلع الانتهاء عكس اتجاه حركة عقارب الساعة، وسالبًا إذا كان دوران ضلع الانتهاء مع اتجاه حركة عقارب الساعة.



زاوية قياسها موجب



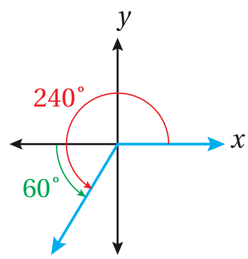
زاوية قياسها سالب

مثال 1

أرسم في الوضع القياسي الزاوية التي عُلِم قياسها في كلٍّ ممّا يأتي:

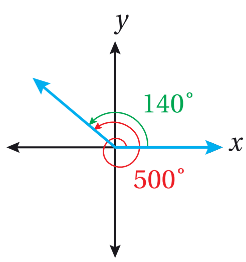
1 $240°$

بمـا أنَّ الزاوية $240°$ تزيد علـى الزاوية $180°$ بمقدار $60°$، فإنّني أرسم ضلع الانتهاء بالدوران $60°$ عكس اتجاه دوران عقارب الساعة، بدءًا بالجزء السالب من المحور x.



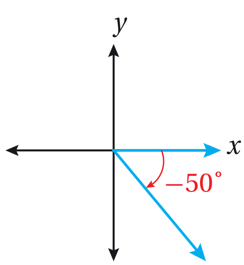
2 $500°$

بمـا أنَّ الزاوية $500°$ تزيد علـى الزاوية $360°$ بمقدار $140°$، فإنَّ ضلـع الانتهاء أكمـل دورة كاملة عكس اتجاه دوران عقارب الساعة، ثم دار أيضًا $140°$ عكس اتجاه دوران عقارب الساعة.



3 $-50°$

بما أنَّ $-50°$ زاوية سـالبة، فإنّني أرسم ضلع الانتهاء بالدوران $50°$ في اتجاه دوران عقارب السـاعة، بدءًا بالجزء الموجب من المحور x.



أتحقَّق من فهمي

أرسم في الوضع القياسي الزاوية التي عُلِم قياسها في كلٍّ ممّا يأتي:

c) $-130°$ b) $650°$ a) $170°$

إرشاد

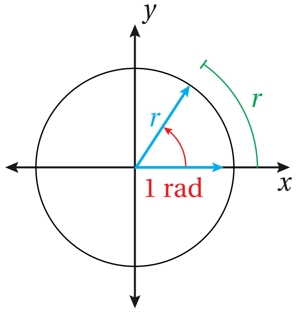
يُمكِن اسـتعمال المنقلة لتمثيـل الزوايـا تمثيلًا دقيقًـا. وفي حـال كان الرسـم تقريبيًّا فيُستعمَل التقدير لرسم الزوايا.

أتعلّم

إذا دار ضلع انتهاء الزاوية فـي الوضـع القياسـي دورة كاملـة عكس اتجاه دوران عقارب السـاعة، فإنَّه يصنع في أثناء دورته زوايـا قياسـها بيـن $0°$ و $360°$، وإذا اسـتمر في دورانـه، فإنَّه يصنع زوايا قياسها أكبر من $360°$

الراديان

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّه يُمكِن قياس الزوايا بالدرجات، ويُمكِن أيضًا قياسـها بوحدةٍ تعتمـد على طول قـوس الدائرة، وتُسـمّى **الراديان** (radian). فقياس الزاوية المرسـومة في الوضع القياسـي، التي يُحدِّد ضلعُ انتهائها قوسًـا من الدائرة، طوله مساوٍ لنصف قُطْر الدائرة، هو 1 راديان.



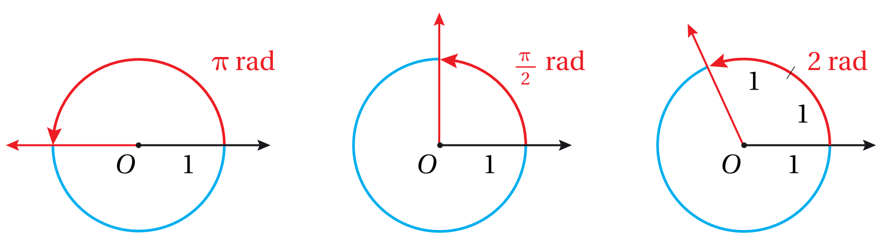
وبما أنَّ محيط الدائرة يساوي $2\pi r$، فإنَّ قياس زاوية الدورة الكاملة هو 2π راديان (عدد مرات تكرار r في $2\pi r$). وبذلك، فإنَّ القياس بالدرجات والقياس بالراديان مُرتبِطان بالمعادلة الآتية:

$$360° = 2\pi \text{ rad} \qquad \text{or} \qquad 180° = \pi \text{ rad}$$

رموز رياضية

يُكتَب 1 راديان في صورة: 1 rad

وهذا يعني أنَّ قياس الزاوية المستقيمة هو π rad، وأنَّ قياس الزاوية القائمة هو $\frac{\pi}{2}$ rad، وأنَّ قياس الزاوية التي يقابلها قوس طوله وحدتان هو 2 rad.



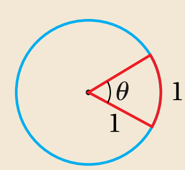
وبما أن $180° = \pi$ rad ، إذن $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)°$ ، $1° = \frac{\pi}{180}$ rad، ويمكن من خلال هاتين العلاقتين تحويل قياس أي زاوية من الدرجات إلى الراديان والعكس على النحو الآتي:

أتعلَّم

في الشكل التالي:

$\theta = 1$ rad

$\theta \approx 57.3°$



مفهوم أساسي **التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان، والعكس**

1) لتحويل قياس زاوية من الدرجات إلى الراديان أضرب في $\frac{\pi \text{ rad}}{180°}$

2) لتحويل قياس زاوية من الراديان إلى الدرجات أضرب في $\frac{180°}{\pi \text{ rad}}$

مثال 2

أُحوِّل قياس الزاوية المكتوب بالدرجات إلى الراديان، وقياس الزاوية المكتوب بالراديان إلى الدرجات في كلٍّ ممّا يأتي:

1 **140°**

$$140° = 140° \left(\frac{\pi \text{ rad}}{180°}\right)$$

$$= 140\cancel{°} \left(\frac{\pi \text{ rad}}{180\cancel{°}}\right)$$

$$= \frac{140\,\pi}{180} = \frac{7\pi}{9} \text{ rad}$$

2 $-\frac{\pi}{12}$

$$-\frac{\pi}{12} = -\frac{\cancel{\pi}}{12} \cancel{\text{rad}} \left(\frac{180°}{\cancel{\pi \text{ rad}}}\right)$$

$$= -15°$$

أتعلَّم

بوجه عام، تُحذَف كلمة (rad) عند التعبير عن قياسات الزوايا بالراديان. وحين يكون قياس الزاوية من دون وحدة، فهذا يعني أنَّ قياسها بوحدة راديان.

أتحقَّق من فهمي

أُحــوِّل قياس الزاوية المكتوب بالدرجات إلى الراديان، وقياس الزاوية المكتوب بالراديان إلى الدرجات في كلٍّ ممّا يأتي:

a) 165°

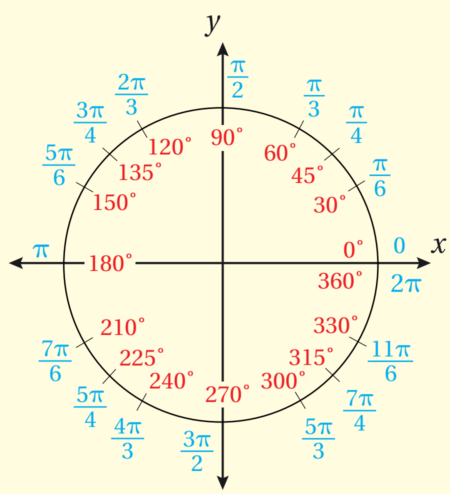
b) $\frac{5\pi}{4}$

c) -80°

d) -6

مفهوم أساسي — قياس الزوايا الخاصة بالدرجات والراديان

يُبيِّن الشكل الآتي القياســات المتكافئة بالدرجات والراديان للزوايا الخاصة من 0° إلى 360° (من 0 rad إلى 2π rad).

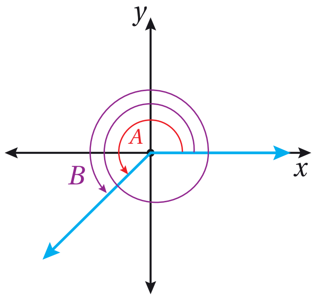


أتعلَّم

من المفيد حفظ القياسات المتكافئة بالدرجات والراديان للزوايا الخاصة في الربع الأول، وللزاوية $90^\circ = \frac{\pi}{2}$؛ فقياسات الزوايا الأُخرى ما هي إلّا مضاعفات لقياسات هذه الزوايا.

الزوايا المُشترِكة

يُطلَق على الزوايا في الوضع القياسي التي لها ضلع الانتهاء نفسه، لكنَّ قياساتها مختلفة، اسم **الزوايا المُشترِكة** (coterminal angles). فمثلًا، الزاويتان A وB في الشكل المجاور هما زاويتان مُشترِكتان.



مفهوم أساسي

يُمكِن إيجاد زاوية مُشتركة في ضلع الانتهاء مع زاوية أُخرى عن طريق جمع أو طرح أحد مضاعفات الزاوية $360°$ أو 2π

بالراديان	بالدرجات
إذا كانت θ تُمثِّل القياس بالراديان لزاوية ما، فإنَّ جميع الزوايا ذات القياس $\theta + 2n\pi$ هي زوايا مُشترِكة مع θ، حيث n عدد صحيح.	إذا كانت θ تُمثِّل القياس بالدرجات لزاوية ما، فإنَّ جميع الزوايا ذات القياس $\theta + 360°\, n$ هي زوايا مشترِكة مع θ، حيث n عدد صحيح.

مثال 3

أجد زاويتين إحداهما قياسها موجب، والأُخرى قياسها سالب، وكلتاهما مُشترِكة في ضلع الانتهاء مع كل زاوية معطاة ممّا يأتي، ثم أرسمهما:

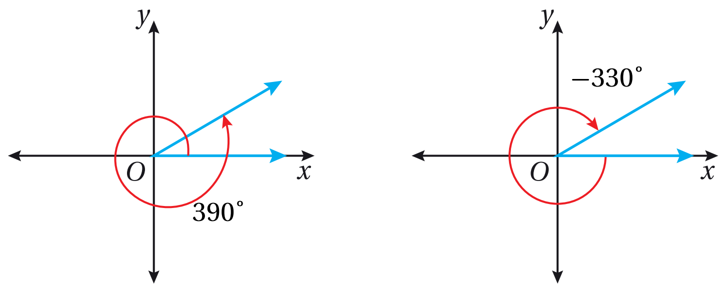
1 $30°$

$\theta + 360°\, n$ — علاقة الزوايا المُشترِكة

$30° + 360°\,(1) = 390°$ — بتعويض $n = 1$ لإيجاد زاوية مُشترِكة قياسها موجب

$30° + 360°\,(-1) = -330°$ — بتعويض $n = -1$ لإيجاد زاوية مُشترِكة قياسها سالب

أمّا رسم كلٍّ من الزاويتين فهو:



2 $-\frac{\pi}{3}$

$\theta + 2n\pi$ — علاقة الزوايا المُشترِكة

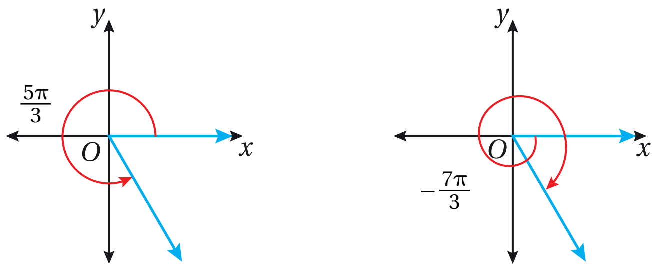
$-\frac{\pi}{3} + 2\,(1)\,\pi = \frac{5\pi}{3}$ — بتعويض $n = 1$ لإيجاد زاوية مُشترِكة قياسها موجب

$-\frac{\pi}{3} + 2\,(-1)\,\pi = -\frac{7\pi}{3}$ — بتعويض $n = -1$ لإيجاد زاوية مُشترِكة قياسها سالب

أتعلَّم

إذا كان الفرق بين أيِّ زاويتين من مضاعفات $360°$ أو 2π، فإنَّهما تكونان مُشترِكتين.

أمّا رسم كلٍّ من الزاويتين فهو:



أتحقَّق من فهمي أجد زاويتين إحداهما قياسها موجب، والأُخرى قياسها سالب، وكلتاهما مُشترِكة في ضلع الانتهاء مع كل زاوية معطاة ممّا يأتي، ثم أرسمهما:

a) $88°$ b) $-920°$ c) $\frac{2\pi}{3}$ d) $-\frac{3\pi}{4}$

تطبيقات: طول القوس ومساحة القطاع

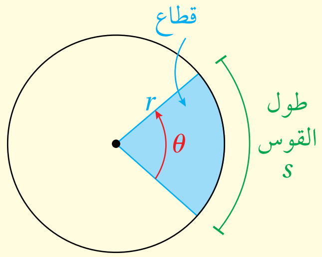
تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ القوس جزء من الدائرة مُحدَّد بنقطتين عليها، وأنَّ القطاع هو الجزء المحصور بين قوس منها ونصفي القُطْرين اللذين يمرّان بطرفي القوس. وسأتعلَّم الآن إيجاد طول القوس ومساحة القطاع عندما يكون قياس الزاوية المركزية بالراديان.

أتذكَّر

الزاوية المركزية في الدائرة هي الزاوية التي يقع رأسها على مركز الدائرة، وضلعاها نصفا قُطْرين في الدائرة.

مفهوم أساسي **طول القوس ومساحة القطاع**

طول القوس



بالكلمات: طول القوس s من الدائرة المقابل لزاوية مركزية قياسها θ بالراديان يساوي ناتج ضرب طول نصف القُطْر r في θ.

بالرموز: $s = r\theta$

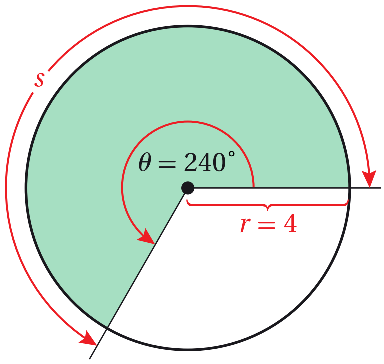
مساحة القطاع

بالكلمات: مساحة القطاع A الذي قياس زاويته المركزية θ بالراديان في دائرة طول نصف قُطْرها r تساوي نصف ناتج ضرب مربع طول نصف القُطْر r في θ.

بالرموز: $A = \frac{1}{2} r^2 \theta$

مثال 4

يُبيِّن الشكل المجاور قطاعًا دائريًّا زاويته المركزية $240°$ في دائرة طول نصف قُطْرها 4 cm. أجد طول القوس ومساحة القطاع، وأقرّب إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة.



لإيجاد طول قوس القطاع الدائري باستعمال الصيغة: $s = r\theta$، أُحوِّل قياس زاوية القطاع من الدرجات إلى الراديان.

الخطوة 1: أُحوِّل قياس الزاوية المركزية من الدرجات إلى الراديان.

$$240° = 240° \left(\frac{\pi \text{ rad}}{180°}\right)$$ بالضرب في $\left(\frac{\pi \text{ rad}}{180°}\right)$

$$= \frac{4\pi}{3}$$ بالتبسيط

الخطوة 2: أجد طول القوس.

$$s = r\theta$$ صيغة طول القوس

$$= 4\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$ بتعويض $r = 4,\ \theta = \frac{4\pi}{3}$

$$\approx 16.8$$ باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، طول القوس هو 16.8 cm تقريبًا.

الخطوة 3: أجد مساحة القطاع.

$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta$$ صيغة مساحة القطاع

$$= \frac{1}{2}(4)^2\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$ بتعويض $r = 4,\ \theta = \frac{4\pi}{3}$

$$\approx 33.5$$ باستعمال الآلة الحاسبة

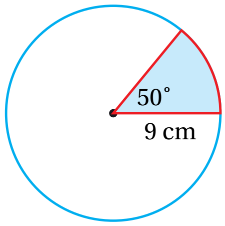
إذن، مساحة القطاع هي 33.5 cm^2 تقريبًا.

تنبيه

وحدة قياس طول القوس هي cm، وليس cm rad؛ لأنَّ الراديان نسبة بلا وحدة، وكذلك هو حال مساحة القطاع.

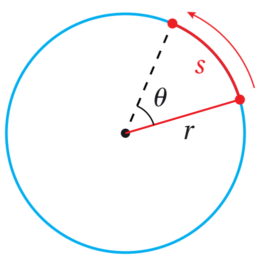
أتحقَّق من فهمي

يُبيِّن الشكل المجاور قطاعًا دائريًّا زاويته المركزية $50°$ في دائرة طول نصف قُطْرِها $9\ cm$. أجد طول القوس ومساحة القطاع، وأقرِّب إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة.



تطبيقات: الحركة الدائرية

إذا افترضْتُ أنَّ نقطة تتحرَّك على محيط دائرة كما في الشكل المجاور، فإنَّه يُمكِنني وصف حركتها باستعمال **السرعة الخطية** (linear velocity) التي تُمثِّل المُعدَّل الذي تتغيَّر فيه المسافة المقطوعة. فالسرعة الخطية هي المسافة المقطوعة مقسومة على المدَّة الزمنية المنقضية.



يُمكِنني أيضًا وصف حركة النقطة باستعمال **السرعة الزاويَّة** (angular velocity) التي تُمثِّل المُعدَّل الذي يتغيَّر فيه قياس الزاوية المركزية. فالسرعة الزاويَّة هي قيمة التغيُّر في قياس الزاوية بالراديان مقسومة على الزمن المنقضي.

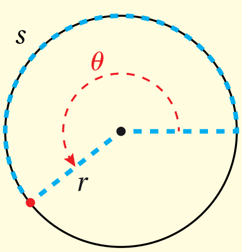
مفهوم أساسي

السرعة الخطية والسرعة الزاويَّة

بافتراض أنَّ نقطة تتحرَّك بسرعة ثابتة على محيط دائرة، طول نصف قُطْرِها r:

- إذا كان s هو طول القوس الذي تقطعه النقطة في مدَّة زمنية مقدارها t، فإنَّ السرعة الخطية v لهذه النقطة تعطى بالعلاقة الآتية:

$$v = \frac{s}{t}$$



- إذا كانت θ هي زاوية الدوران (بالراديان) التي دارتها النقطة في مدَّة زمنية مقدارها t، فإنَّ السرعة الزاويَّة ω لهذه النقطة تعطى بالعلاقة الآتية:

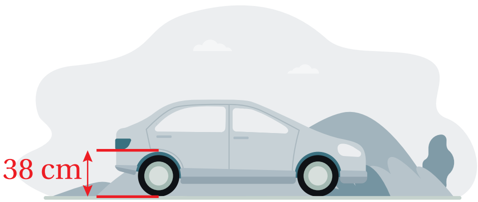
$$\omega = \frac{\theta}{t}$$

لغة الرياضيات

الحرف اليوناني ω يُقرَأ: أوميغا، وهو يُستعمَل للدلالة على السرعة الزاويَّة.

مثال 5 : من الحياة

سيّارة: **إطار سيّارة يبلغ طول قُطْره 38 cm، ويدور 9.3 دورات في الثانية:**



1 **أجـد السـرعة الخطية للإطـار بالسـنتيمتر لـكل ثانية.**

بمـا أنَّ قياس الـدورة الكاملة 2π، فـإنَّ 9.3 دورات تقابـل زاوية الدوران θ التي قياسـها $9.3 \times 2\pi$، أو $18.6\ \pi$ راديان.

السرعة الخطية: $v = \dfrac{s}{t}$

بتعويض $s = r\theta$: $= \dfrac{r\theta}{t}$

بتعويض $r = 19,\ \theta = 18.6\ \pi,\ t = 1\text{ s}$: $= \dfrac{(19)(18.6\ \pi)\text{cm}}{1\text{ s}}$

بالتبسيط: $= \dfrac{353.4\ \pi\text{ cm}}{1\text{ s}}$

إذن، السرعة الخطية للإطار هي $353.4\ \pi$ cm/s.

2 **أجد السرعة الزاويَّة للإطار بالراديان لكل ثانية.**

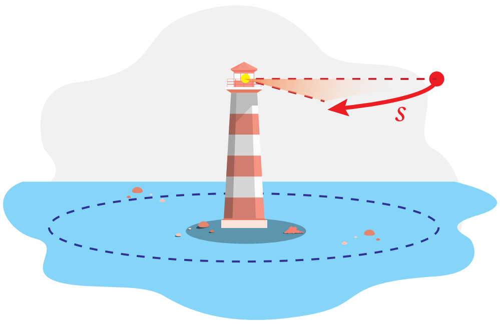
السرعة الزاويَّة: $\omega = \dfrac{\theta}{t}$

بتعويض $t = 1\text{ s}\ ,\ \theta = 18.6\ \pi$: $= \dfrac{18.6\ \pi\text{ rad}}{1\text{ s}}$

إذن، السرعة الزاويَّة للإطار هي $18.6\ \pi$ rad/s، أو 58.4 rad/s تقريبًا.

أتحقَّق من فهمي

منـارة: **تتوسَّـط منـارة قنـاة ماء، ويتحـرَّك ضوؤهـا حركـة دائرية بسرعة ثابتة. إذا أكمل ضوء المنارة دورة كاملـة كل 10 ثـوانٍ، فأجد السرعة الزاويَّة لضوئها في الدقيقة.**



أتعلّم

لإيجـاد زاويـة الدوران التـي تقابل عـددًا معيّنًا مـن الـدورات، أضرب عدد الـدورات في قياس الدورة الكاملة 2π

أتعلَّم

عندما يتحرَّك جسم حركة دائرية، فإنَّ سرعته تقاس بالسرعة الخطية، في حين تقاس سرعة تغيُّر الزاوية بالسرعة الزاويَّة.

أتدرّب وأحلّ المسائل

أرسم في الوضع القياسي الزاوية التي عُلِم قياسها في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $450°$
2) $-900°$
3) $540°$
4) $-700°$
5) $-\frac{\pi}{6}$
6) $\frac{21\pi}{4}$
7) $\frac{7\pi}{6}$
8) $\frac{\pi}{9}$

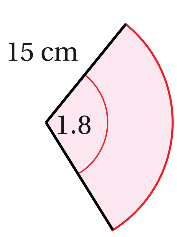
أُحوِّل قياس الزاوية المكتوب بالدرجات إلى الراديان، وقياس الزاوية المكتوب بالراديان إلى الدرجات في كلٍّ ممّا يأتي:

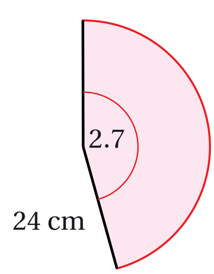
9) $-225°$
10) $-135°$
11) $75°$
12) $500°$
13) $-\frac{\pi}{7}$
14) $\frac{5\pi}{12}$
15) 1.2
16) 4

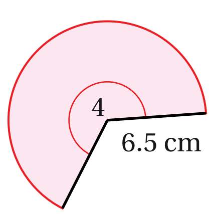
أجد زاويتين إحداهما قياسها موجب، والأُخرى قياسها سالب، وكلتاهما مُشترِكة في ضلع الانتهاء مع كل زاوية معطاة ممّا يأتي، ثم أرسمهما:

17) $50°$
18) $135°$
19) $1290°$
20) $-150°$
21) $\frac{11\pi}{6}$
22) $-\frac{\pi}{4}$
23) $-\frac{\pi}{12}$
24) $\frac{7\pi}{6}$

أجد طول القوس ومساحة القطاع في كلٍّ ممّا يأتي، وأقرّب إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

25)


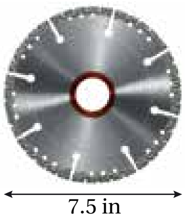
26)


27)


معلومة

الشفرة الماسية هي شفرة منشار تحتوي على ماسٍ صناعي مُثبَّت بحافتها، وتُستعمَل لقطع المواد الصُّلْبة، مثل: الرخام، وحجر البناء، وبلاط السيراميك.

28 يُدوِّر طفل حجرًا مربوطًا بطرف حبل طوله 3 ft بمُعدَّل 15 دورة في 10 ثوانٍ. أجد السرعة الزاويَّة والسرعة الخطية للحجر.



قُطْر شفرة منشار ماسية دائرية الشكل 7.5 in، وهي تدور 2400 دورة في الدقيقة:

29 أجد السرعة الزاويَّة لهذه الشفرة بالراديان لكل ثانية.

30 أجد السرعة الخطية لأسنان المنشار عند ملامستها الرخام المراد قطعه.

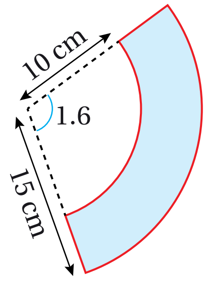
مهارات التفكير العليا

31 أكتشف الخطأ: حوّل أحمد قياس الزاوية °24 من الدرجات إلى الراديان كما هو مُبيَّن أدناه. أكتشف الخطأ في حلّه وأصحّحه.

$$24° = 24\cancel{°}\left(\frac{180\cancel{°}}{\pi\ \text{rad}}\right)$$
$$= \frac{4320}{\pi}\ \text{rad}$$
$$\approx 1375.1\ \text{rad}$$

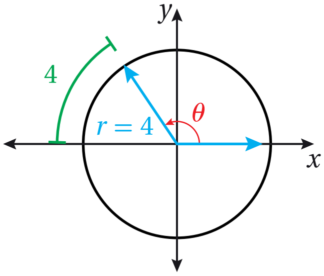
✗

تبرير: **يُمثِّل الشكل المُظلَّل المجاور جزءًا من قطاع دائري:**



32 أجد مساحة هذا الشكل.

33 أجد محيط هذا الشكل.



34 تبرير: أجد قياس الزاوية θ في الشكل المجاور، وأبرّر إجابتي.

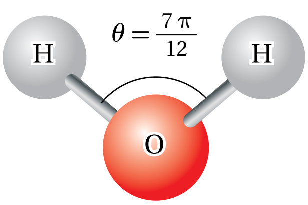
الدرس 2

الاقترانات المثلثية
Trigonometric Functions

فكرة الدرس إيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية لأيِّ زاوية.

المصطلحات الاقتـــران المثلثي، قاطع التمـــام، القاطع، ظل التمام، اقترانات المقلـــوب، الزاوية الربعية، الزاوية المرجعية.

مسألة اليوم يتكوَّن جـــزيء الماء من ذرَّة أكســـجين وذرَّتـــي هيدروجين، وتتوسَّط ذرَّة الأكســـجين هذا الجزيء، ويكون قياس الزاوية θ بين رابطتي $O-H$ $\frac{7\pi}{12}$ تقريبًا. أجد $\cos\frac{7\pi}{12}$.

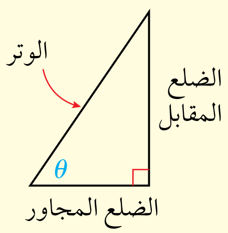


الاقترانات المثلثية

الاقتران المثلثي (trigonometric function) هو قاعدة معطاة باستعمال النسبة المثلثية. وتُستعمَل قياسات أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية وقياس زاوية حادَّة فيه لإيجاد النسب المثلثية الست التي تُحدِّد ستة اقترانات مثلثية.

مفهوم أساسي **جميع الاقترانات المثلثية في مثلث قائم الزاوية**

إذا مثَّلـــت θ قياس زاوية حادَّة في مثلث قائم الزاوية، فإنَّ الاقترانات المثلثية الستة تُعرَف بدلالة الوتر، والضلع المقابل، والضلع المجاور كما يأتي:



قاطع التمام (cosecant) $\csc\theta = \frac{(\text{الوتر})}{\text{المقابل}}$

الجيب (sine) $\sin\theta = \frac{(\text{المقابل})}{\text{الوتر}}$

القاطع (secant) $\sec\theta = \frac{(\text{الوتر})}{\text{المجاور}}$

جيب التمام (cosine) $\cos\theta = \frac{(\text{المجاور})}{\text{الوتر}}$

ظل التمام (cotangent) $\cot\theta = \frac{(\text{المجاور})}{\text{المقابل}}$

الظل (tangent) $\tan\theta = \frac{(\text{المقابل})}{(\text{المجاور})}$

يُطلَق على اقترانات قاطع التمام، والقاطع، وظل التمام، اسم **اقترانات المقلوب** (reciprocal functions)؛ لأنَّها مقلوب نسب الجيب، وجيب التمام، والظل على الترتيب، ويُمكِن تعريفها على النحو الآتي:

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad , \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

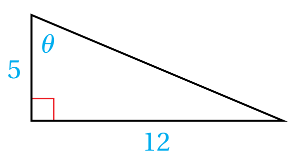
أتعلَّم

يُمكِن اشتقاق العلاقات الآتية من تعريفات اقترانات الجيب، وجيب التمام، والظل، وظل التمام:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

مثال 1



أجد قِيَم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ في المثلث المجاور.

الخطوة 1: أجد طول الوتر باستعمال نظرية فيثاغورس.

$c^2 = a^2 + b^2$ نظرية فيثاغورس

$c^2 = 5^2 + 12^2$ بتعويض $a = 5, b = 12$

$c^2 = 169$ بالتبسيط

$c = \pm\sqrt{169}$ بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

$c = 13$ الطول لا يُمكِن أنْ يكون سالبًا

الخطوة 2: أجد الاقترانات المثلثية للزاوية θ.

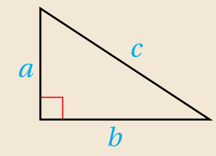
$$\sin\theta = \frac{\text{(المقابل)}}{\text{(الوتر)}} = \frac{12}{13} \qquad \cos\theta = \frac{\text{(المجاور)}}{\text{(الوتر)}} = \frac{5}{13} \qquad \tan\theta = \frac{\text{(المقابل)}}{\text{(المجاور)}} = \frac{12}{5}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{(الوتر)}}{\text{(المقابل)}} = \frac{13}{12} \qquad \sec\theta = \frac{\text{(الوتر)}}{\text{(المجاور)}} = \frac{13}{5} \qquad \cot\theta = \frac{\text{(المجاور)}}{\text{(المقابل)}} = \frac{5}{12}$$

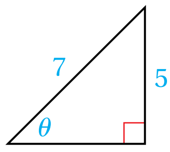
أتذكَّر

تنص نظرية فيثاغورس على أنَّ مربع طول الوتر في المثلث القائم الزاوية يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين؛ أيْ إنَّ:

$$c^2 = a^2 + b^2$$



أتحقَّق من فهمي



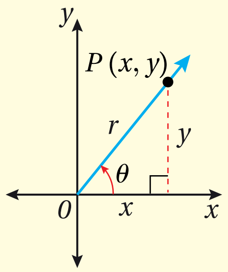
أجد قِيَم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ في المثلث المجاور.

قِيَم الاقترانات المثلثية لأيِّ زاوية باستعمال نقطة معلومة

يُمكِن تعميم تعريفات الاقترانات المثلثية الخاصة بالزاوية الحادَّة (في المثلث القائم الزاوية)، لتشمل أيَّ زاوية في الوضع القياسي.

مفهوم أساسي

إذا كانت θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي، والنقطة $P(x, y)$ تقع على ضلع الانتهاء للزاوية θ، و r يُمثِّل البُعْد بين النقطة P ونقطة الأصل، حيث: $r = \sqrt{x^2 + y^2}, r \neq 0$، فإنَّ الاقترانات المثلثية للزاوية θ تُعرَّف كما يأتي:

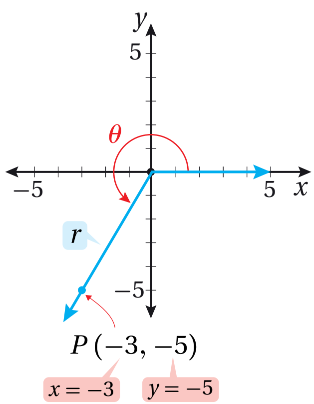


$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}, x \neq 0$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y}, y \neq 0 \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}, x \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$$

مثال 2

تقع النقطة $(-3, -5)$ على ضلع انتهاء الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي. أجد قِيَم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ.



الخطوة 1: أرسم الزاوية θ، ثم أجد قيمة r.

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ نظرية فيثاغورس

$= \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2}$ بتعويض $x = -3, y = -5$

$= \sqrt{34}$ بأخذ الجذر التربيعي الموجب

الخطوة 2: أستعمل القِيَم: $x = -3, y = -5, r = \sqrt{34}$ لكتابة الاقترانات المثلثية الستة.

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-5}{\sqrt{34}} = -\frac{5}{\sqrt{34}} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{34}}{-5} = -\frac{\sqrt{34}}{5}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-3}{\sqrt{34}} = -\frac{3}{\sqrt{34}} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{34}}{-3} = -\frac{\sqrt{34}}{3}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$$

أتحقَّق من فهمي

تقع النقطة $(1, -3)$ على ضلع انتهاء الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي. أجد قِيَم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ.

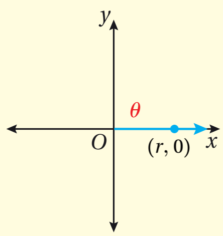
تعلَّمْتُ في الأمثلة السـابقة إيجـاد قِيَم الاقترانات المثلثية للزاوية θ من دون معرفة قياسـها. وسأتعلَّم الآن طرائق إيجاد قِيَم هذه الاقترانات عندما يكون قياس الزاوية θ فقط معلومًا.

إيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية للزوايا الربعية

إذا انطبق ضلع انتهاء الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي على أحد المحورين الإحداثيين، فإنَّ هذه الزاوية تُسمّى **زاوية ربعية** (quadrantal angle).

مفهوم أساسي

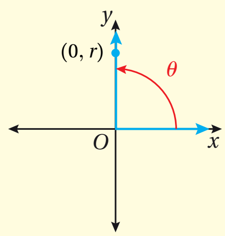
الزوايا الربعية



$\theta = 0°$

أو

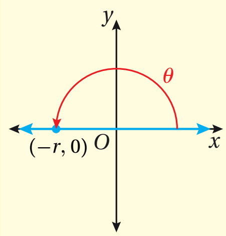
$\theta = 0$ rad



$\theta = 90°$

أو

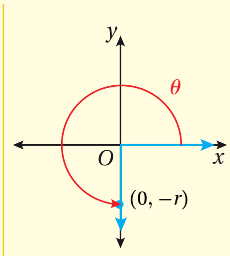
$\theta = \frac{\pi}{2}$ rad



$\theta = 180°$

أو

$\theta = \pi$ rad



$\theta = 270°$

أو

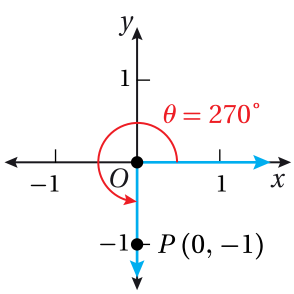
$\theta = \frac{3\pi}{2}$ rad

يُمكِـن إيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية للزوايا الربعية باختيار نقطة تقع على ضلع انتهاء الزاوية، ثم إيجاد الاقتران المثلثي عند تلك النقطة.

مثال 3

أجد قيمة كل اقتران مثلثي ممّا يأتي إذا كان مُعرَّفًا، وإلّا أكتب عبارة (غير مُعرَّف):

1 **cot 270°**



ينطبق ضلع انتهاء الزاوية °270 على المحور y السالب،

فأختار النقطة $P(0, -1)$ على ضلع الانتهاء؛ لأنَّ $r = 1$:

$$\cot(270°) = \frac{x}{y}$$ اقتران ظل التمام

$$= \frac{0}{-1} = 0$$ بتعويض $x = 0, y = -1$

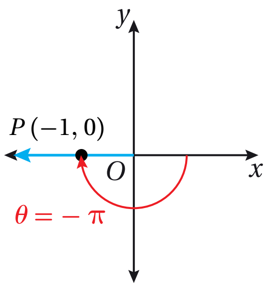
أتعلَّم

لتسهيل عملية الحساب، أختـار نقطة تكون قيمة r عندها 1

2 $\csc(-\pi)$

ينطبق ضلع انتهاء الزاوية $-\pi$ على المحور x السالب،

فأختار النقطة $P(-1, 0)$ على ضلع الانتهاء؛ لأنَّ $r = 1$:



$$\csc(-\pi) = \frac{r}{y}$$ اقتران قاطع التمام

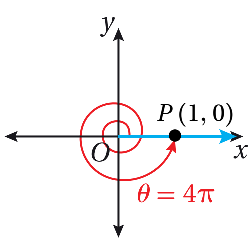
$$= \frac{1}{0}$$ بتعويض $r = 1, y = 0$

غير مُعرَّف

3 $\cos 4\pi$

ينطبق ضلع انتهاء الزاوية 4π على المحور x الموجب،

فأختار النقطة $P(1, 0)$ على ضلع الانتهاء؛ لأنَّ $r = 1$:



$$\cos(4\pi) = \frac{x}{r}$$ اقتران جيب التمام

$$= \frac{1}{1} = 1$$ بتعويض $x = 1, r = 1$

أتعلَّم

يوجد عدد لانهائي من الزوايا الربعية التي تشترك مع الزوايا الربعية في الدورة الكاملة، وتكون قياساتها مضاعفات $90°$ أو $\frac{\pi}{2}$

أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة كل اقتران مثلثي ممّا يأتي إذا كان مُعرَّفًا، وإلّا أكتب عبارة (غير مُعرَّف):

a) $\sin 3\pi$

b) $\tan 90°$

c) $\sec\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$

إيجاد قيَم الاقترانات المثلثية باستعمال الزوايا المرجعية

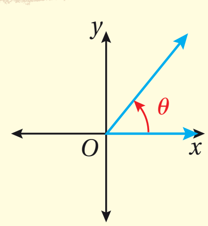
إذا كانت θ زاوية غير ربعية مرسومة في الوضع القياسي، فإنَّ **الزاوية المرجعية** (reference angle) للزاوية θ هي الزاوية الحادَّة θ' المحصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ والمحور x. يُبيِّن الجدول الآتي العلاقة بين θ و θ' لأيِّ زاوية θ غير ربعية.

لغة الرياضيات

الرمز θ' يُقرَأ: ثيتا برايم.

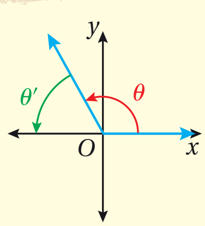
مفهوم أساسي — **الزوايا المرجعية**

الربع الأول



$\theta' = \theta$

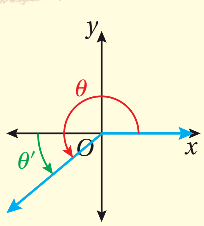
الربع الثاني



$\theta' = 180° - \theta$

$\theta' = \pi - \theta$

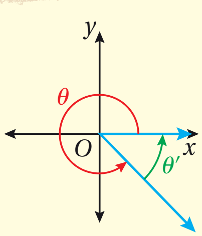
الربع الثالث



$\theta' = \theta - 180°$

$\theta' = \theta - \pi$

الربع الرابع



$\theta' = 360° - \theta$

$\theta' = 2\pi - \theta$

تُســتعمَل الزوايا المرجعية لإيجاد قيمة الاقترانات المثلثية لأيِّ زاوية θ، وتعتمد إشــارة قيمة الاقتران المثلثي على الربع الذي يقع فيه ضلع انتهاء الزاوية θ.

أتَّبع الخطوات الآتية لإيجاد قيمة الاقترانات المثلثية لأيِّ زاوية θ:

الخطوة 1: أجد قياس الزاوية المرجعية θ'.

الخطوة 2: أجد قيمة الاقتران المثلثي للزاوية المرجعية θ'.

الخطـوة 3: أستعمل الربع الذي يقع فيه ضلع انتهاء الزاوية θ، لتحديد إشــارة قيمة الاقتران المثلثــي للزاويــة θ، بالاســتعانة بالمُخطَّط المجاور.

الربع الثاني	الربع الأول
$\sin\theta, \csc\theta$: (+)	$\sin\theta, \csc\theta$: (+)
$\cos\theta, \sec\theta$: (−)	$\cos\theta, \sec\theta$: (+)
$\tan\theta, \cot\theta$: (−)	$\tan\theta, \cot\theta$: (+)
الربع الثالث	**الربع الرابع**
$\sin\theta, \csc\theta$: (−)	$\sin\theta, \csc\theta$: (−)
$\cos\theta, \sec\theta$: (−)	$\cos\theta, \sec\theta$: (+)
$\tan\theta, \cot\theta$: (+)	$\tan\theta, \cot\theta$: (−)

يُبيِّــن الجــدول الآتي قِيَم بعــض الاقترانات المثلثية للزوايا الخاصة.

θ	$30° = \frac{\pi}{6}$	$45° = \frac{\pi}{4}$	$60° = \frac{\pi}{3}$
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

أتعلَّم

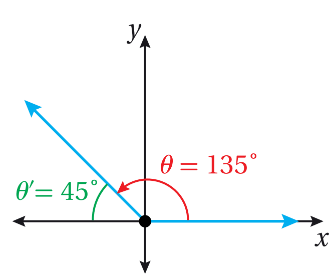
بمـا أنَّ القِيَــم الدقيقــة للاقترانــات المثلثيــة للزوايــا الخاصــة: $30°, 45°, 60°$ معلومة، فإنَّــه يُمكِن إيجــاد قِيَم الاقترانــات المثلثيــة لجميع الزوايا التي تُمثِّل الزوايا الخاصــة مرجعًا لها.

مثال 4

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1 $\sin 135°$

يقع ضلع انتهاء الزاوية $135°$ في الربع الثاني؛ لذا أستعمل زاويتها المرجعية:



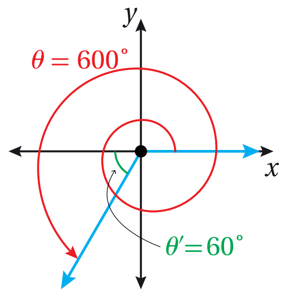
$\theta' = 180° - \theta$ بإيجاد قياس الزاوية المرجعية

$= 180° - 135° = 45°$ $\theta = 135°$

$\sin 135° = \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ الجيب موجب في الربع الثاني

2 $\cos 600°$

بما أنَّ الزاوية °600 أكبر من الزاوية °360، فإنَّني أجد أولًا الزاوية المُشترِكة مع الزاوية °600، التي قياسها موجب، وأقل من °360:



بتعويض $n = -1$ لإيجاد زاوية مُشترَكة قياسها موجب

$$600° + 360°\,(-1) = 240°$$

يقع ضلع انتهاء الزاوية °240 في الربع الثالث؛ لذا أستعمل زاويتها المرجعية:

بإيجاد قياس الزاوية المرجعية
$$\theta' = \theta - 180°$$

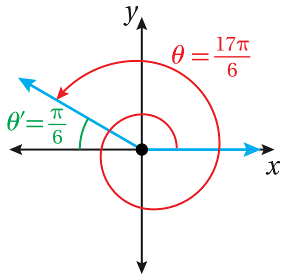
$\theta = 240°$
$$= 240° - 180°$$

بالطرح
$$= 60°$$

جيب التمام سالب في الربع الثالث
$$\cos 600° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

3 $\csc \frac{17\pi}{6}$

بما أنَّ الزاوية $\frac{17\pi}{6}$ أكبر من 2π، فإنَّني أجد أولًا الزاوية المُشترِكة مع الزاوية $\frac{17\pi}{6}$، التي قياسها موجب، وأقل من 2π:



بتعويض $n = -1$ لإيجاد زاوية مُشترَكة قياسها موجب

$$\frac{17\pi}{6} + 2\,(-1)\pi = \frac{5\pi}{6}$$

يقع ضلع انتهاء الزاوية $\frac{5\pi}{6}$ في الربع الثاني؛ لذا أستعمل زاويتها المرجعية:

بإيجاد قياس الزاوية المرجعية
$$\theta' = \pi - \theta$$

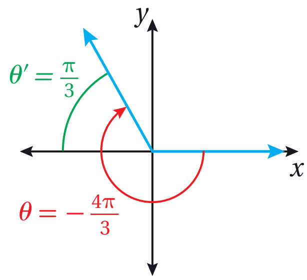
$\theta = \frac{5\pi}{6}$
$$= \pi - \frac{5\pi}{6}$$

بالطرح
$$= \frac{\pi}{6}$$

قاطع التمام موجب في الربع الثاني
$$\csc \frac{17\pi}{6} = \csc \frac{\pi}{6} = 2$$

4 $\cot\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

بما أنَّ الزاوية $\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$ سالبة، فإنَّني أجد أولًا الزاوية المُشترِكة مع الزاوية $\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$، التي قياسها موجب، وأقل من 2π:



بتعويض $n = 1$ لإيجاد زاوية مُشترَكة قياسها موجب

$$-\frac{4\pi}{3} + 2\,(1)\pi = \frac{2\pi}{3}$$

يقع ضلع انتهاء الزاوية $\frac{2\pi}{3}$ في الربع الثاني؛ لذا أستعمل زاويتها المرجعية:

$\theta' = \pi - \theta$ بإيجاد قياس الزاوية المرجعية

$= \pi - \frac{2\pi}{3}$ $\theta = \frac{2\pi}{3}$

$= \frac{\pi}{3}$ بالطرح

$\cot\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -\cot\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ظل التمام سالب في الربع الثاني

أتحقَّق من فهمي أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

a) $\sin 210°$

b) $\cos 510°$

c) $\sec\frac{11\pi}{4}$

d) $\tan\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

إيجـاد قِيَم الاقترانات المثلثية لزاوية عُلم الربع الذي يقع فيه ضلع انتهائها، وقيمة اقتران مثلثي أو أكثر لها

تعلَّمْـتُ في الأمثلة السـابقة إيجاد قِيَم الاقترانـات المثلثية إذا عُلِمت نقطـة تقع على ضلع الزاوية θ، أو إذا عُلِم قياسها. وسأتعلَّم في المثال الآتي إيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية إذا عُلِمت قيمة اقتران مثلثي أو أكثر للزاوية θ، والربع الذي يقع فيه ضلع انتهائها.

مثال 5

إذا كان $\tan\theta = -4$، حيـث $\sin\theta < 0$، فأجد قيمة كلٍّ من الاقترانات المثلثية الخمسـة المتبقية للزاوية θ.

أجد القِيَم الدقيقة للاقترانات الأُخرى بإيجاد إحداثيي نقطة تقع على ضلع انتهاء الزاوية θ.

بما أنَّ $\tan\theta$ سالب و $\sin\theta$ سالب، فإنَّ الزاوية θ تقع في الربع الرابع، وهذا يعني أنَّ إشارة x موجبة وإشارة y سالبة.

وبما أنَّ $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-4}{1}$، فأستعمل النقطة $(1, -4)$ لإيجاد قيمة r:

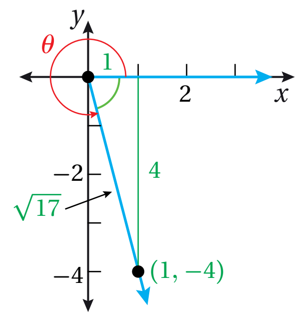
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ نظرية فيثاغورس

$= \sqrt{(1)^2 + (-4)^2}$ بتعويض $x = 1, y = -4$

$= \sqrt{17}$ بأخذ الجذر التربيعي الموجب

أتعلَّم

يُمكِنني اختيـار أيِّ قيمة لـ x و y بحيث يكون ناتج القسمة مساويًا لـ -4



أستعمل $x = 1, y = -4, r = \sqrt{17}$ لإيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية الأُخرى:

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-4}{\sqrt{17}} = -\frac{4}{\sqrt{17}} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{17}}{-4} = -\frac{\sqrt{17}}{4}$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{17}} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{17}}{1} = \sqrt{17}$$

أتحقَّق من فهمي

إذا كان $\sec\theta = 2$، حيث $\sin\theta < 0$، فأجد قيمة كلٍّ من الاقترانات المثلثية الخمسة المتبقية للزاوية θ.

أتذكَّر

اقتران واحـد لواحد هو اقتران لا يوجد في مجاله قيمتـان مُرتبِطتان بالقيمة نفسها في المدى.

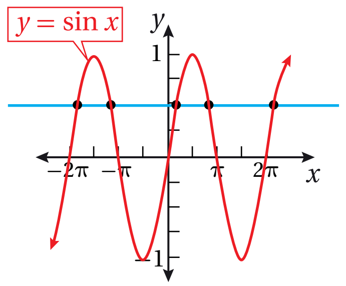
يُمكِـن تحديـد إذا كان الاقتران واحدًا لواحد أم لا باستعمال اختبار الخط الأفقي (أي مستقيم أفقي يقطع منحنى الاقتران في نقطة واحدة على الأكثر).

أتعلّم

تعلَّمْـتُ سـابقًا تمثيـل الاقترانـات المثلثيـة عندمـا تكـون الزوايـا بالدرجـات فـي الفترة $[0°, 360°]$، وسـأتعلّم في الـدرس التالي تمثيل هذه الاقترانـات المثلثية بالراديان كما في الشكل المجاور.

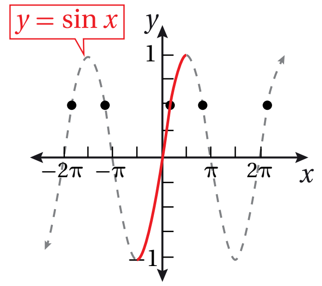
معكوس اقتران الجيب، وجيب التمام، والظل

تعلَّمْتُ سـابقًا أنَّه يُمكِن إيجاد الاقتران العكسـي لاقترانٍ إذا وفقـط إذا كان الاقتران واحدًا لواحـد، وهذا يعني أنَّ كل عنصر في مداه يرتبط بعنصر واحد فقط في مجاله، ويُمكِن التحقُّق من ذلك باستعمال اختبار الخط الأفقي.

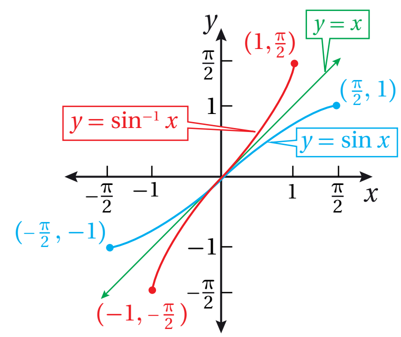


ألاحِـظ من الشـكل المجـاور أنَّ اقتـران الجيب $y = \sin x$ فشل في اختبار الخط الأفقي؛ ما يعني أنَّه ليس اقتران واحـد لواحد؛ لذا لا يُمكِن إيجاد اقتران عكسي له.

ولكـنْ، لو اقتصر مجـال اقتران الجيب على الفترة $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ كما في الشـكل الآتي، فإنَّه يصبـح اقتران واحد لواحـد لجميع قِيَم المدى $[-1, 1]$، عندئذٍ يُمكِن إيجاد اقتران عكسـي لاقتران الجيب في المجال المُحدَّد، ويُسمّى معكوس اقتران الجيب $y = \sin^{-1} x$.



أمّـا التمثيل البياني للاقتـران $y=\sin^{-1}x$ فيُمكِن إيجاده بعكس منحنـى اقتران الجيب في المجال المُحدَّد حول المستقيم $y=x$ كما في الشكل الآتي.



رموزٌ رياضيةٌ

يـدلّ الرمـز $f^{-1}(x)$ على الاقتران العكسـيِّ للاقتـران f، أمّـا الرمز $\frac{1}{f(x)}$ فيـدلُّ على مقلوب الاقتران f.

نتيجةً لما سبق؛ يُمكِن إيجاد معكوس اقتران الجيب، وجيب التمام، والظل ضمن مجال مُحدَّد باستعمال تعريف الاقتران العكسي.

مفهوم أساسي

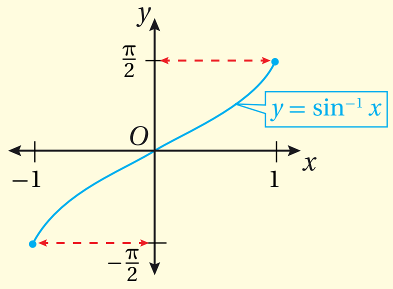
معكوس اقتران الجيب، وجيب التمام، والظل

معكوس اقتران الجيب

$y=\sin^{-1}x$ إذا وفقط إذا $\sin y = x$، حيث: $-1\le x\le 1$، و $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$

المجال: $[-1, 1]$.

المدى: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

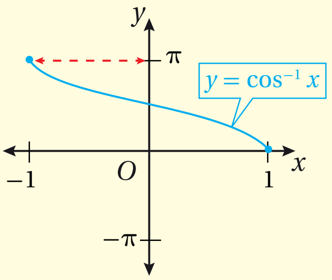


معكوس اقتران جيب التمام

$y=\cos^{-1}x$ إذا وفقط إذا $\cos y = x$، حيث: $-1\le x\le 1$، و $0\le y\le \pi$

المجال: $[-1, 1]$.

المدى: $[0, \pi]$.

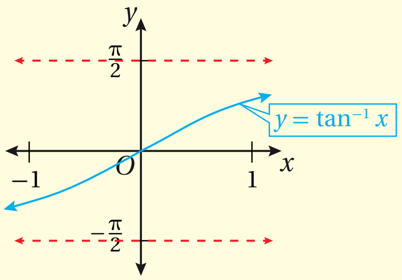


معكوس اقتران الظل

$y=\tan^{-1}x$ إذا وفقط إذا $\tan y = x$، حيث: $-\infty < x < \infty$، و $-\frac{\pi}{2}< y<\frac{\pi}{2}$

المجال: $(-\infty, \infty)$.

المدى: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.



لإيجاد قيمة اقتران عكسـي عنـد نقطة ما، تُعكَس قاعـدة الاقتران الأصلي. فمثـلًا، بما أنَّ $\sin\frac{\pi}{2}=1$، فإنَّ $\sin^{-1}1=\frac{\pi}{2}$.

مثال 6

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي (إنْ وُجِدت)، في الفترة المعطاة إزاء كل منها:

1 $\sin^{-1}\frac{1}{2}, \quad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

الزاوية التي قيمة الجيب لها $\frac{1}{2}$ في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ هي $\frac{\pi}{6}$؛ لذا، فإنَّ:

$$\sin^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

2 $\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad [0, \pi]$

الزاوية التي قيمة جيب التمام لها $\frac{\sqrt{3}}{2}$ في الفترة $[0, \pi]$ هي $\frac{\pi}{6}$؛ لذا، فإنَّ:

$$\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$$

3 $\tan^{-1} 1, \quad \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

الزاوية التي قيمة الظل لها 1 في الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ هي $\frac{\pi}{4}$؛ لذا، فإنَّ:

$$\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$$

أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي (إنْ وُجِدت):

a) $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

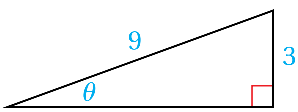
b) $\cos^{-1} 0, \quad [0, \pi]$

c) $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

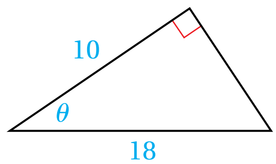
أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد قِيَم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ في كلٍّ ممّا يأتي:

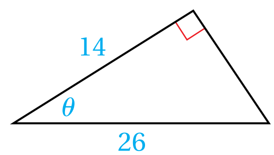
1



2



3



تقع النقطة المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي على ضلع انتهاء الزاوية θ المرســومة في الوضع القياسي. أجد قِيَم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ:

4 $(-12, 5)$

5 $(3, -3)$

6 $(-2, -5)$

7 $(3, 7)$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

8 $\sec 135°$

9 $\tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

10 $\cot\left(\frac{8\pi}{3}\right)$

11 $\cos\frac{7\pi}{4}$

12 $\sec\frac{15\pi}{4}$

13 $\csc(-630°)$

14 $\tan 7\pi$

15 $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

أجد قيمة كلٍّ من الاقترانات المثلثية الخمسة المتبقية للزاوية θ في كلٍّ ممّا يأتي:

16 $\cos\theta = -\frac{7}{12}, \tan\theta > 0$

17 $\sec\theta = 5, \sin\theta < 0$

18 $\cot\theta = \frac{1}{4}, \sin\theta < 0$

19 $\csc\theta = 2, \cos\theta > 0$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي (إن وُجِدَت):

20 $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

21 $\tan^{-1}(\sqrt{3}), \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

22 $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right), [0, \pi]$

إذا كان $\cos\frac{\pi}{12} = 0.966$ لأقرب ثلاث منازل عشرية، فأستعمل هذه الحقيقة لإيجاد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، وأبرّر إجابتي:

23 $\cos\frac{13\pi}{12}$

24 $\cos\frac{11\pi}{12}$

25 $\cos\frac{-\pi}{12}$

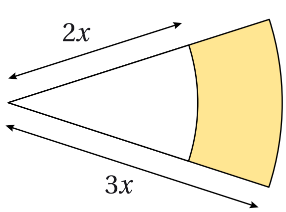
26 $\cos\frac{23\pi}{12}$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

27 $\left(\cos\frac{3\pi}{4}\right)^2 + \left(\sin\frac{4\pi}{3}\right)^2 + \left(\cos\frac{5\pi}{4}\right)^2$

28 $\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3} + \sin\pi - \sin\frac{4\pi}{3} + \sin\frac{5\pi}{3} - \sin 2\pi$

مهارات التفكير العليا



29 تحدٍّ: يُبيِّن الشكل المجاور قطاعين دائريين ناتجين من دائرتين متحدتين في المركز. إذا كان قياس زاوية القطاعين 0.75، ومساحة الجزء المُظلَّل $30\ cm^2$، فأجد قيمة x.

تبرير: أُثبِت كُلًّا ممّا يأتي، وأبرّر إجابتي:

30 $\tan 210° + \tan 240° = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

31 $\frac{\sin 30° + \sin 60°}{\sin 45°} = \frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$

32 $\cos 30° + \cos 45° + \cos 60° = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$

الدرس 3

تمثيل الاقترانات الجيبية بيانيًّا
Graphing Sinusoidal Functions

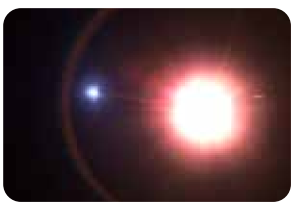
فكرة الدرس

- تمثيل اقتران الجيب، وجيب التمام بيانيًّا في المستوى الإحداثي.
- تمثيل منحنيات الاقترانات الجيبية الناتجة من تحويل هندسي أو أكثر لمنحنى الاقترانين الرئيسين: $f(x) = \cos x$، و $f(x) = \sin x$.

المصطلحات

السعة، الاقتران الدوري، الدورة، طول الدورة، الاقترانات الجيبية، خط الوسط.

مسألة اليوم



النجوم المُتغيِّرة هي نجوم يختلف سطوعها بشكل دوري، وأحد أكثرها شهرة هو آرلينوس، الذي يُمكِن حساب قيمة سطوعه بالاقتران: $b(t) = 7.9 - 2.1 \cos(\frac{\pi}{156} t)$، حيث t الزمن بالأيام. أجد السطوع الأقصى والسطوع الأدنى لهذا النجم.

تمثيل الاقتران: $f(x) = \sin x$، والاقتران: $f(x) = \cos x$ بيانيًّا

تعلَّمْتُ سابقًا تمثيل الاقترانين المثلثيين: $y = \sin x$، و $y = \cos x$ عندما تكون الزوايا بالدرجات في الفترة $[0°, 360°]$، وذلك بإنشاء جدول قِيَم للمُتغيِّرين x و y، وتمثيل كل زوج بنقطة في المستوى. ويُمكِن استعمال هذه الطريقة لتمثيل الاقترانين نفسيهما عند قياس الزوايا بالراديان في الفترة $[0, 2\pi]$.

مثال 1

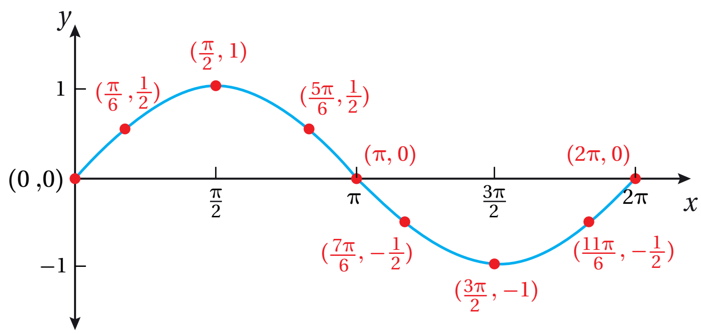
1 أُمثِّل الاقتران: $f(x) = \sin x$ بيانيًّا في الفترة $[0, 2\pi]$.

الخطوة 1: أُنشِئ جدولًا أكتب فيه زوايا شائعة، نسبها المثلثية معروفة، مثل: الزوايا الربعية، والزوايا الخاصة.

الخطوة 2: أجد قيمة $\sin x$ لكل زاوية x، ثم أكتبها في الجدول الآتي.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \sin x$	0	0.5	1	0.5	0	-0.5	-1	-0.5	0
(x, y)	$(0, 0)$	$(\frac{\pi}{6}, 0.5)$	$(\frac{\pi}{2}, 1)$	$(\frac{5\pi}{6}, 0.5)$	$(\pi, 0)$	$(\frac{7\pi}{6}, -0.5)$	$(\frac{3\pi}{2}, -1)$	$(\frac{11\pi}{6}, -0.5)$	$(2\pi, 0)$

الخطوة 3: أُعيِّن الأزواج المُرتَّبة في المستوى الإحداثي، ثم أصل بينها بمنحنى، فينتج التمثيل البياني الآتي.



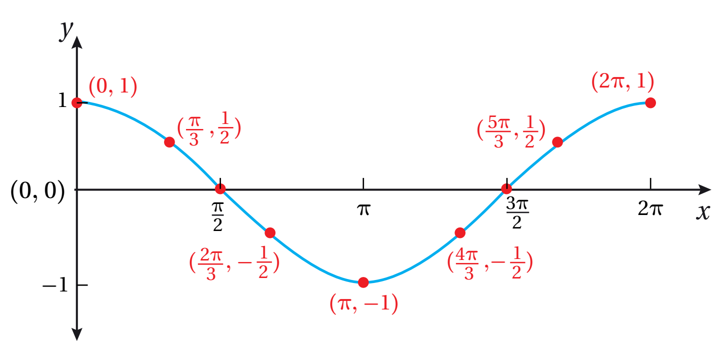
2 أُمثِّل الاقتران: $f(x) = \cos x$ بيانيًّا في الفترة $[0, 2\pi]$.

الخطوة 1: أُنشِئ جدولًا أكتب فيه زوايا شائعة، نسبها المثلثية معروفة، مثل: الزوايا الربعية، والزوايا الخاصة.

الخطوة 2: أجد قيمة $\cos x$ لكل زاوية x، ثم أكتبها في الجدول الآتي.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$y = \cos x$	1	0.5	0	-0.5	-1	-0.5	0	0.5	1
(x, y)	$(0, 1)$	$(\frac{\pi}{3}, 0.5)$	$(\frac{\pi}{2}, 0)$	$(\frac{2\pi}{3}, -0.5)$	$(\pi, -1)$	$(\frac{4\pi}{3}, -0.5)$	$(\frac{3\pi}{2}, 0)$	$(\frac{5\pi}{3}, 0.5)$	$(2\pi, 1)$

الخطوة 3: أُعيِّن الأزواج المُرتَّبة في المستوى الإحداثي، ثم أصل بينها بمنحنى، فينتج التمثيل البياني الآتي.



أتعلَّم

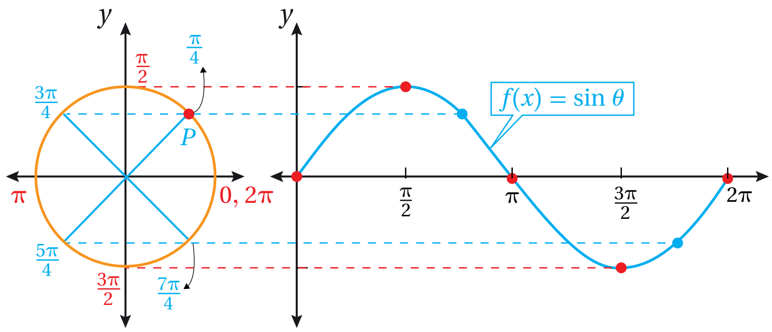
أُلاحِظ أنَّ منحنى اقتران جيب التمام هو انسحاب إلى اليسار لمنحنى اقتران الجيب بمقدار $\frac{\pi}{2}$.

أتحقَّق من فهمي

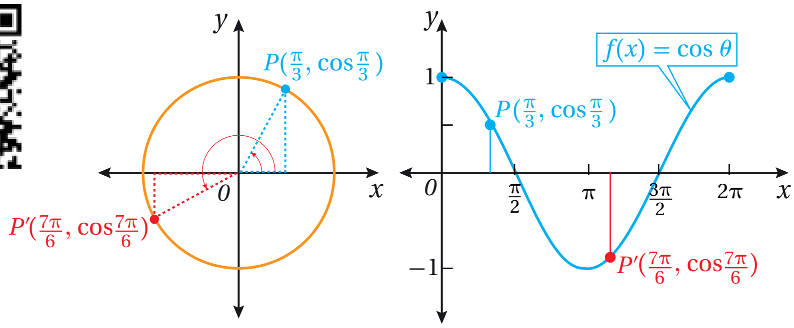
1 أُمثِّل الاقتران: $f(x) = \sin x$ بيانيًّا في الفترة $[-2\pi, 2\pi]$.

2 أُمثِّل الاقتران: $f(x) = \cos x$ بيانيًّا في الفترة $[-2\pi, 2\pi]$.

ألاحِظ من المثال السابق أنَّ التمثيل البياني لمنحنى الاقتران: $f(x) = \sin\theta$ يربط بين قياس الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي والإحداثي y للنقطة P التي يقطع عندها ضلع انتهاء الزاوية دائرة الوحدة كما في الشكل الآتي.



أمّا التمثيل البياني للاقتران: $f(x) = \cos\theta$ فيربط بين قياس الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي والإحداثي x للنقطة P التي يقطع عندها ضلع انتهاء الزاوية دائرة الوحدة كما في الشكل الآتي.



في ما يأتي خصائص التمثيل البياني للاقترانين: $f(x) = \sin x$، و $f(x) = \cos x$:

- مجال كلٍّ من الاقترانين هو مجموعة الأعداد الحقيقية.
- مدى كلٍّ من الاقترانين هو الفترة $[-1, 1]$؛ لذا، فإنَّ القيمة الصغرى لكلٍّ منهما -1، والقيمة العظمى لكلٍّ منهما 1
- **سعة** (amplitude) منحنى الاقتران هي نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى، وتساوي 1 لكلٍّ من الاقترانين؛ لأنَّ:

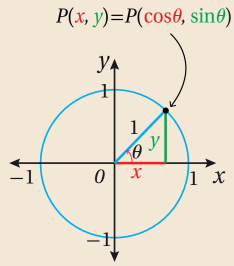
$$\frac{1}{2}(1-(-1)) = 1$$

- كلٌّ من الاقترانين هو **اقتران دوري** (periodic function)، وهذا يعني أنَّ التمثيل البياني لمنحنى كلٍّ منهما له نمط مُتكرِّر، وأنَّ أقصر جزء مُتكرِّر من التمثيل يُسمّى **الدورة** (cycle).

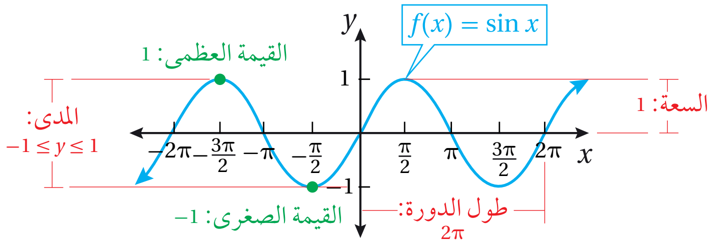
أتذكَّر

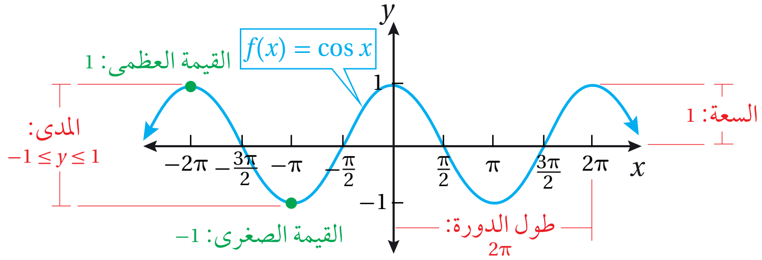
دائرة الوحدة هي دائرة مركزها نقطة الأصل، وطول نصف قُطْرها وحدة واحدة.

إذا رُسِمت الزاوية θ في الوضع القياسي، فإنَّ ضلع انتهائها يقطع دائرة الوحدة في نقطة وحيدة هي $P(x, y)$.



- الطول الأفقي لكل دورة يُسمّى **طول الدورة** (period)، والتمثيل البياني للاقترانين يُظهِر أنَّ طول الدورة هو 2π.





الاقترانات الجيبية

الاقترانات الجيبية (sinusoidal functions) هي اقترانات الجيب وجيب التمام الناتجة من تحويل هندسي أو أكثر لمنحنى الاقترانين الرئيسين: $f(x) = \sin x$، و $f(x) = \cos x$.

بوجه عام، فإنَّ الصورة العامة للاقترانات الجيبية هي:

$$g(x) = a \cos (bx - c) + d \qquad\qquad g(x) = a \sin (bx - c) + d$$

حيث: a, b, c, d أعداد حقيقية، و a و b لا يساويان صفرًا.

التمدُّد الرأسي للاقترانات الجيبية

إذا كان $|a| > 1$، فإنَّ المعامل a في الاقترانين: $g(x) = a \sin x$، و $g(x) = a \cos x$ يؤدي إلى توسيع رأسي لمنحنى الاقتران $f(x) = \sin x$، ومنحنى الاقتران $f(x) = \cos x$، وإذا كان $|a| < 1$، فإنَّ المعامل a يؤدي إلى تضييق رأسي للمنحنيين؛ ما يعني أنَّ قيمة a تُؤثِّر في سعة الاقترانات الجيبية.

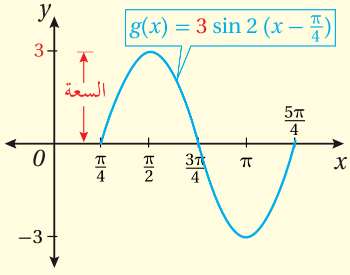
سعة الاقترانات الجيبية

مفهوم أساسي

بالكلمات: سعة منحنى الاقتران الجيبي هي نصف المسافة بين قيمتيه العظمى والصغرى، أو نصف ارتفاع الموجة.

بالرموز: سعة كلٍّ من: $g(x) = a \sin (bx-c)+ d$، و $g(x) = a \cos (bx - c)+d$، هي $|a|$.

مثال:



لتمثيل منحنى الاقتران الجيبي $g(x) = a \sin x$، أو الاقتران الجيبي $g(x) = a \cos x$ بيانيًّا، أرســم نقاط تقاطع اقتران الجيب الرئيس، أو جيب التمام الرئيس مع المحور x، ثم أســتعمل قيمة السعة $|a|$ لتحديد نقاط عظمى وصغرى للاقتران الجيبي، ثم أرسم الموجة التي تمرُّ بهذه النقاط.

أتعلَّم

يُطلَق علــى كلٍّ من نقاط تقاطع الاقتــران الجيبي مع المحــور x، والنقاط العظمى والصغرى، اسم **النقاط المفتاحية**.

مثال 2

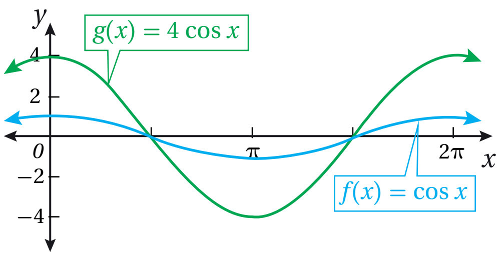
أُمثِّل منحنى كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا:

1 $\mathbf{g(x) = 4 \cos x}$

منحنى الاقتران $g(x) = 4 \cos x$ هو توســيع رأســي لمنحنى الاقتران $f(x) = \cos x$، بمعامل مقداره 4، ولتمثيل منحنى الاقتران $g(x)$، أَتَّبع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: أُحدِّد سعة الاقتران $g(x)$، وهي: $|4|$ ، أو 4

الخطــوة 2: أُحدِّد إحداثيات نقــاط تقاطع منحنى الاقتــران $f(x) = \cos x$ مع المحور x، والنقاط العظمى والصغرى له في الفترة $[0, 2\pi]$.



الخطــوة 3: أضرب الإحداثي y لكل نقطة عظمى أو صغرى على منحنى الاقتران $f(x)$ في ســعة الاقتران $g(x)$؛ لإيجــاد النقاط المقابلة لها على منحنى الاقتران g.

الخطوة 4: أُمثِّل منحنى الاقتران $g(x)$ اعتمادًا على النقاط الجديدة.

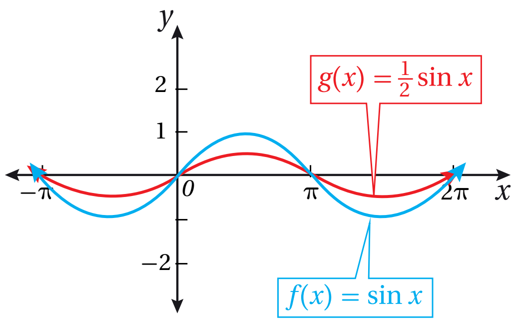
2 $\mathbf{g(x) = \frac{1}{2} \sin x}$

منحنى الاقتران: $g(x) = \frac{1}{2} \sin x$ هو تضييق رأســي لمنحنى الاقتران: $f(x) = \sin x$، بمعامل مقداره $\frac{1}{2}$، ولتمثيل منحنى الاقتران $g(x)$، أَتَّبع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: أُحدِّد سعة الاقتران $g(x)$، وهي: $\left|\frac{1}{2}\right|$ ، أو $\frac{1}{2}$

الخطــوة 2: أُحدِّد إحداثيات نقاط تقاطــع الاقتران $f(x) = \sin x$ مــع المحور x، والنقاط العظمى والصغرى له في الفترة $[0, 2\pi]$.

الخطوة 3: أضرب الإحداثي y لكل نقطة عظمى أو صغرى على منحنى الاقتران $f(x)$ في سعة الاقتران $g(x)$؛ لإيجاد النقاط المقابلة لها على منحنى الاقتران $g(x)$.



الخطوة 4: أُمثِّل منحنى الاقتران $g(x)$ اعتمادًا على النقاط الجديدة.

أتحقَّق من فهمي

أُمثِّل منحنى كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا:

a) $g(x) = 2 \sin x$

b) $g(x) = \frac{1}{4} \cos x$

التمدُّد الأفقي للاقترانات الجيبية

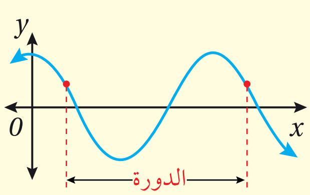
إذا كان $|b| < 1$، فإنَّ المعامل b في الاقترانين: $g(x) = \sin b\,x$، و $g(x) = \cos b\,x$ يؤدي إلى توسيع أفقي لمنحنى كلٍّ من الاقترانين: $f(x) = \sin x$، و $f(x) = \cos x$، وإذا كان $|b| > 1$، فإنَّ المعامل b يؤدي إلى تضييق أفقي للمنحنيين؛ ما يعني أنَّ قيمة b تُؤثِّر في طول دورة الاقترانات الجيبية.

أتعلَّم

عند تحديد طول دورة الاقتران الجيبي من تمثيله البياني، فإنَّها تكون أقصر مسافة تحوي قِيَم الاقتران المختلفة جميعها، ويكرِّر المنحنى نفسه بعدها.

مفهوم أساسي — **طول دورة الاقترانات الجيبية**

بالكلمات: طول دورة الاقتران الجيبي هو طول أقصر فترة على المحور الأفقي يكرِّر بعدها المنحنى نفسه بالهيئة نفسها.



بالرموز: طول دورة كلٍّ من: $g(x) = a \sin (bx - c) + d$، و $g(x) = a \cos (bx - c) + d$، هو $\frac{2\pi}{|b|}$، حيث: $b \neq 0$.

لتمثيل منحنى الاقتران الجيبي $g(x) = \sin b\,x$، أو الاقتران الجيبي $g(x) = \cos b\,x$، أُحدِّد طول دورة الاقتران، ثم أجد النقاط المفتاحية لاقتران الجيب الرئيس أو اقتران جيب التمام، ثم أضرب الإحداثي x لكل نقطة مفتاحية في $\frac{1}{b}$.

مثال 3

أُمثِّل منحنى كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا:

1 $g(x) = \sin \frac{x}{2}$

منحنى الاقتران $g(x) = \sin \frac{x}{2}$ هو توسيع أفقي لمنحنى الاقتران $f(x) = \sin x$، بمعامل مقداره 2، ولتمثيل منحنى الاقتران $g(x)$، أتّبع الخطوات الآتية:

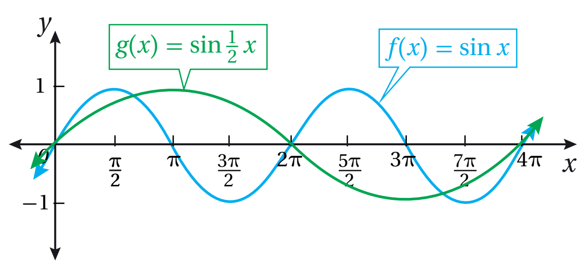
الخطوة 1: أُحدِّد طول دورة الاقتران $g(x)$، وهي:

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$$

الخطوة 2: أُحدِّد إحداثيات نقاط تقاطع الاقتران $f(x) = \sin x$ مع المحور x، والنقاط العظمى والصغرى له في الفترة $[0, 4\pi]$.

الخطوة 3: أضرب الإحداثي x لكل نقطة مفتاحية على منحنى الاقتران $f(x)$ في 2؛ لإيجاد النقاط المقابلة لها على منحنى الاقتران $g(x)$.

الخطوة 4: أُمثِّل منحنى الاقتران $g(x)$ اعتمادًا على النقاط الجديدة.



أتذكَّر

الإحداثي x لكل نقطة على منحنى الاقتران $g(x) = f(bx)$ ناتج من ضرب الإحداثي x للنقطة المقابلة لها على منحنى الاقتران $f(x)$ في $\frac{1}{b}$.

إرشاد

يُمكِن التحقُّق من التمثيل البياني للاقتران $g(x) = \sin \frac{x}{2}$ بالتحقُّق من أنَّ طول دورته 4π

2 $g(x) = \cos 2x$

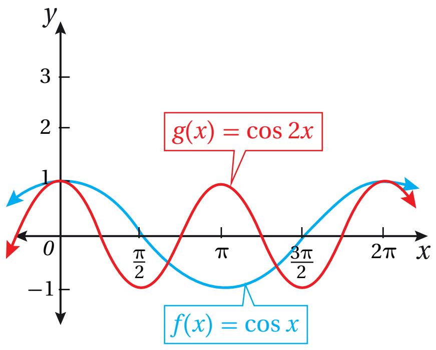
منحنى الاقتران $g(x) = \cos 2x$ هو تضييق أفقي لمنحنى الاقتران $f(x) = \cos x$، بمعامل مقداره $\frac{1}{2}$ ، ولتمثيل منحنى الاقتران $g(x)$، أتّبع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: أُحدِّد طول دورة الاقتران $g(x)$، وهي:

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$$

الخطوة 2: أُحـــدِّد إحداثيات نقاط تقاطع الاقتـــران $f(x) = \cos x$ مع المحور x، والنقاط العظمى والصغرى له في الفترة $[0, 2\pi]$.

الخطوة 3: أضـــرب الإحداثي x لـــكل نقطة مفتاحية على منحنى الاقتران $f(x)$ في $\frac{1}{2}$؛ لإيجاد النقاط المقابلة لها على منحنى الاقتران $g(x)$.



الخطوة 4: أُمثِّل منحنى الاقتران $g(x)$ اعتماداً على النقاط الجديدة.

إرشاد

يُمكِن التحقُّق من صحة التمثيل البياني للاقتران $g(x) = \cos 2x$ بالتحقُّق من أنَّ طول دورته π.

أتحقَّق من فهمي

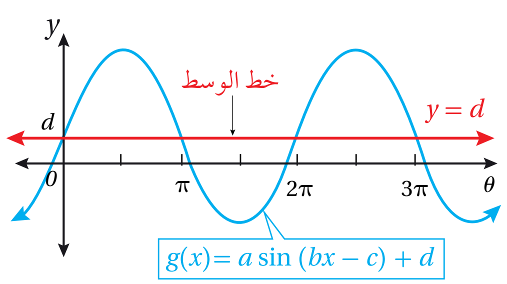
أُمثِّل منحنى كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا:

a) $g(x) = \sin 3x$

b) $g(x) = \cos \frac{x}{3}$

الانسحاب الرأسي للاقتراانات الجيبية

تعلَّمْتُ ســابقًا أنَّ منحنــى الاقتران $g(x) = f(x) + c, c > 0$، هــو منحنى الاقتران $f(x)$، مزاحًا c وحدة إلــى الأعلى، وأنَّ منحنى الاقتــران $g(x) = f(x) - c$ هو منحنى الاقتــران $f(x)$، مزاحًــا c وحــدة إلى الأســفل. وهــذه القاعــدة تنطبق على الاقترانات الجيبية.



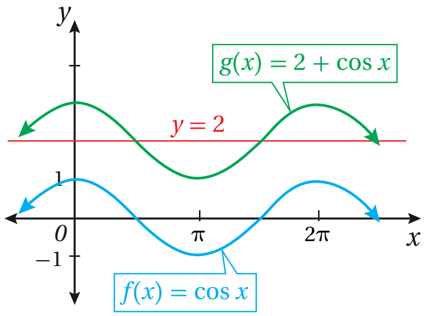
يتذبــذب منحنيا الاقترانيــن الرئيســين: $f(x) = \sin x$، و $f(x) = \cos x$ حول المحور x، ولكنْ عند إجراء انســحاب رأســي للاقتران الجيبي، فإنَّ منحناه يتذبذب حول محور جديد يُسمّى **خط الوسط** (midline).

بوجه عام، فإنَّ خط الوسط لمنحنى الاقتران الجيبي $g(x) = a \sin (bx - c) + d$، أو منحنى الاقتران الجيبي $g(x) = a \cos (bx - c) + d$، هو $y = d$.

مثال 4

أُمثِّل منحنى الاقتران $g(x) = 2 + \cos x$ بيانيًّا.

منحنى الاقتران $g(x) = 2 + \cos x$ هو منحنى الاقتران $f(x) = \cos x$، مزاحًا وحدتين إلى الأعلى. ولتمثيله بيانيًّا، أُحدِّد النقاط المفتاحية لمنحنى الاقتران $f(x)$، ثم أزيد الإحداثي y بمقدار 2 لكل نقطة، ثم أُعيِّنها في المستوى الإحداثي، وأصِلُ بينها بمنحنى.



أُلاحِظ أنَّ خط الوسط لمنحنى الاقتران $g(x) = 2 + \cos x$ هو $y = 2$، وأنَّ النقاط المفتاحية تتذبذب حوله.

أتذكَّر

يزيد الإحداثي y لكل نقطة على منحنى الاقتران g بمقدار وحدتين على الإحداثي y للنقطة المقابلة لها على منحنى الاقتران f.

أتحقَّق من فهمي أُمثِّل منحنى الاقتران $g(x) = \sin x - 3$ بيانيًّا.

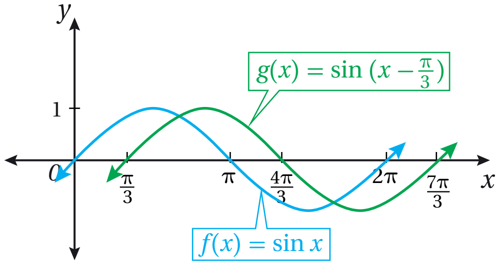
الانسحاب الأفقي للاقترانات الجيبية

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ منحنى الاقتران $g(x) = f(x + c), c > 0$ هو منحنى الاقتران $f(x)$، مزاحًا c وحدة إلى اليسار، وأنَّ منحنى الاقتران $g(x) = f(x - c)$ هو منحنى الاقتران $f(x)$، مزاحًا c وحدة إلى اليمين. وهذه القاعدة تنطبق على الاقترانات الجيبية.

مثال 5

أُمثِّل منحنى الاقتران $g(x) = \sin \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ بيانيًّا.

منحنى الاقتران $g(x) = \sin \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ هو منحنى الاقتران $f(x) = \sin x$، مزاحًا $\frac{\pi}{3}$ وحدة إلى اليمين. ولتمثيله بيانيًّا، أُحدِّد النقاط المفتاحية لمنحنى الاقتران $f(x)$، ثم أُضيف $\frac{\pi}{3}$ إلى الإحداثي x لكل نقطة، ثم أُعيِّنها في المستوى الإحداثي، وأصِلُ بينها بمنحنى.



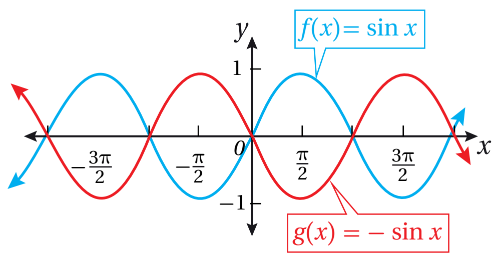
أتذكَّر

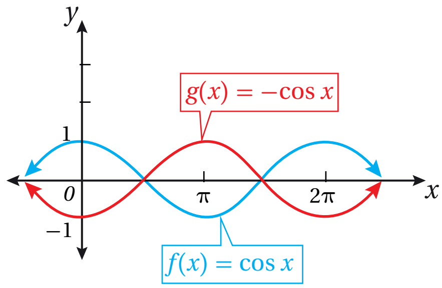
يزيد الإحداثي x لكل نقطة على منحنى الاقتران g بمقدار $\frac{\pi}{3}$ وحدة على الإحداثي x للنقطة المقابلة لها على منحنى الاقتران f.

أتحقَّق من فهمي أُمثِّل منحنى الاقتران $g(x) = \cos \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ بيانيًّا.

انعكاس الاقترانات الجيبية

تعلَّمْتُ في الأمثلة السابقة تمثيل الاقترانات الجيبية في صورة $g(x) = a\sin(bx - c)+d$، وصورة $g(x) = a\cos(bx - c)+d$ إذا كانت $a > 0$. ولتحديد تأثير قيمة a عندما تكون $a < 0$، أتأمَّل التمثيل البياني لمنحنيي الاقترانين الآتيين: $g(x) = -\sin x$، و $g(x) = -\cos x$.





أُلاحِظ أنَّ منحنى الاقتران $g(x) = -\sin x$ هو انعكاس لمنحنى الاقتران $f(x) = \sin x$ حول المحور x، وأنَّ منحنى الاقتران $g(x) = -\cos x$ هو أيضًا انعكاس لمنحنى الاقتران $f(x) = \cos x$ حول المحور x.

بوجه عام، عندما تكون $a < 0$، فإنَّ منحنى الاقتران $g(x) = a\sin(bx - c)+d$، ومنحنى الاقتران $g(x) = a\cos(bx - c)+d$ يكونان انعكاسًا لمنحنى الاقتران: $g(x) = |a|\sin(bx - c)+d$، ومنحنى الاقتران $g(x) = |a|\cos(bx - c)+d$ على الترتيب حول خط الوسط $y = d$.

مثال 6

أجد السعة، وطول الدورة، ومعادلة خط الوسط للاقتران $g(x)=-\frac{1}{2}\cos(x-\frac{3\pi}{2})+1$، ثم أُمثِّله بيانيًّا.

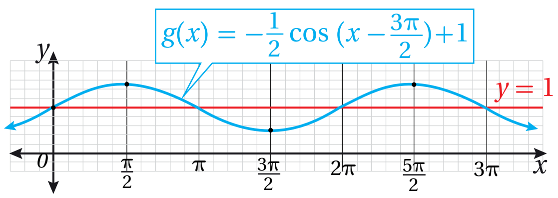
في هذا الاقتران: $a = -\frac{1}{2}, b = 1, c = \frac{3\pi}{2}, d = 1$

السعة: $|a| = \frac{1}{2}$. طول الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$. معادلة خط الوسط: $y = 1$.

لتمثيل منحنى الاقتران $g(x)$، أتَّبِع الخطوات الآتية:

- أُمثِّل خط الوسط $y = 1$ في المستوى الإحداثي.
- أُمثِّل منحنى الاقتران $f(x) = \cos x$ باستعمال النقاط المفتاحية.

- أعكس النقاط المفتاحية من الخطوة السابقة حول المحور x.
- أضرب الإحداثي y للنقاط المفتاحية في $\frac{1}{2}$؛ لتضييق سعة منحنى الاقتران رأسيًّا.
- أُضيف $\frac{3\pi}{2}$ إلى الإحداثي x لكل نقطة مفتاحية؛ لإزاحة منحنى الاقتران $\frac{3\pi}{2}$ وحدة إلى اليمين.
- أُضيف 1 إلى الإحداثي y؛ لإزاحة منحنى الاقتران وحدة إلى الأعلى.
- أُمثِّل منحنى الاقتران $g(x)$ اعتمادًا على النقاط الجديدة.



أتحقَّق من فهمي

أجد السعة، وطول الدورة، ومعادلة خط الوسط للاقتران: $g(x) = -2\sin(x - \pi) - 3$، ثم أُمثِّله بيانيًّا.

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد طول الدورة والسعة (إن وُجِدَت) لكل اقتران ممّا يأتي، ثم أُمثِّله بيانيًّا:

1. $g(x) = 3\sin x$
2. $g(x) = \cos 3x$
3. $g(x) = 2 - \cos x$
4. $g(x) = 1 + \frac{1}{2}\cos \pi x$
5. $g(x) = 3 + 2\sin 3(x + \pi)$
6. $g(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

أكتب بجانب كل اقتران ممّا يأتي رمز التمثيل البياني المناسب له من بين التمثيلات البيانية $(a-f)$ الظاهرة أدناه:

7 $g(x) = -2 + \sin(2x + \pi)$

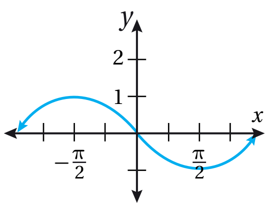
8 $g(x) = -\sin(x + \pi)$

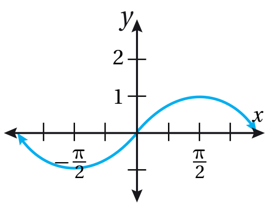
9 $g(x) = -3 + \cos x$

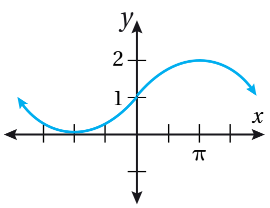
10 $g(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

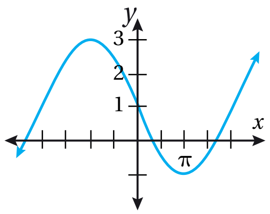
11 $g(x) = 1 + \sin \frac{1}{2}x$

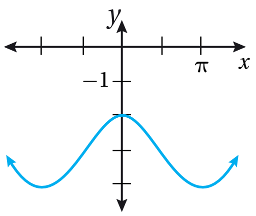
12 $g(x) = 1 + 2\cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right)$

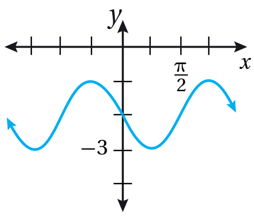
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

أَصِف التحويلات الهندسية التي طُبِّقت على منحنى الاقتران f لينتج منحنى الاقتران g في كلٍّ ممّا يأتي:

13 $f(x) = 2\cos x$, $g(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$

14 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $g(x) = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2$

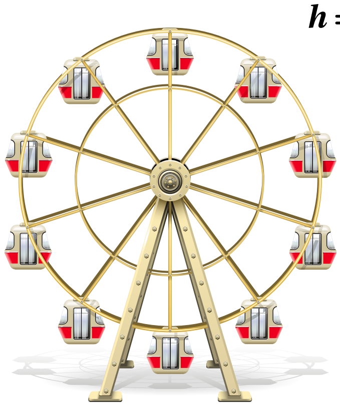
15 $f(x) = \sin 3x$, $g(x) = \sin 3(x + 3\pi) - 5$

16 $f(x) = \cos x + 9$, $g(x) = \cos 6(x - \pi) + 9$

معلومة

قُطْر بعض العجلات الدوّارة كبير جدًّا؛ فقد يزيد على 200 m؛ ما يجعل عرباتها ترتفع عاليًا، فيتمكَّن الرُّكّاب من مشاهدة المعالم المحيطة بهم.

عجلة دوّارة: تُمثِّل المعادلة: $h = 25 \sin \frac{\pi}{15} (t - 7.5) + 30$ **الارتفاع عن سطح الأرض بالأقدام لشخص يركب في عجلة دوّارة، حيث t الزمن بالثواني:**



17) أُمثِّل منحنى معادلة ارتفاع الشخص مع الزمن بيانيًّا.

18) ما أقصى ارتفاع للشخص وأدنى ارتفاع له عن سطح الأرض؟

مهارات التفكير العليا

تبرير: **أُميِّز الجملة الصحيحة من الجملة غير الصحيحة في ما يأتي، وأبرّر إجابتي:**

19) كل اقتران جيب في صورة $y = a_1 \sin (b_1 x - c_1) + d_1$ يُكتَب بوصفه اقتران جيب تمام في صورة $y = a_2 \cos (b_2 x - c_2) + d_2$.

20) طول دورة الاقتران $f(x) = \cos 8x$ يساوي أربعة أضعاف طول دورة الاقتران $g(x) = \cos 2x$.

21) تحدٍّ: أملأ الفراغ بما هو مناسب في ما يأتي لتصبح المعادلة صحيحة:

$$\cos (-2x + 6\pi) = \sin 2 (x + \square)$$

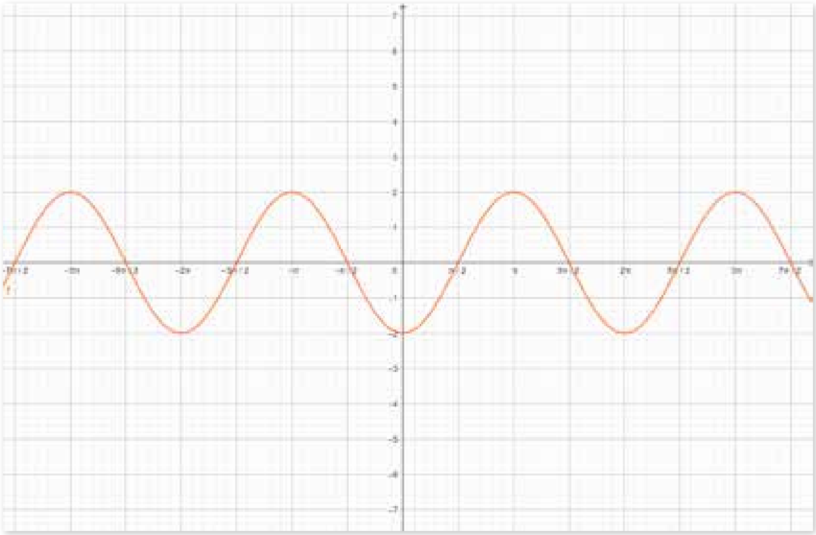
معمل برمجية جيوجبرا

تمثيل الاقترانات الجيبية بيانيًّا
Graphing Sinusoidal Functions

يُمكِنني استعمال برمجية جيوجبرا لتمثيل الاقترانات الجيبية بيانيًّا باستعمال نظام الراديان.

نشاط

أُمثِّل منحنى الاقتران: $f(x) = 2\cos(x - \pi)$ باستعمال برمجية جيوجبرا.



1 أكتب الاقتران: $f(x) = 2\cos(x - \pi)$ في شريط الإدخال، ثم أضغط على زرِّ الإدخال Enter.

2 لتغيير قياسات الزوايا إلى نظام الراديان، أنقر أيقونة ، ثم أيقونة ، فتظهر قائمة في الجانب الأيمن من الشاشة.

3 أختار xAxis من القائمة، ثم أنقر المربع الصغير بجانب كلمة Distance: ؛ لتفعيل هذه الخانة.

4 بعد تفعيل خانة Distance: أستطيع اختيار التقسيم المناسب للمحور x. فمثلًا، أنقر السهم الصغير المجاور للكلمة، ثم أختار منه $\frac{\pi}{2}$: Distance: π/2

5 أُغيِّر وحدة القياس المُستعمَلة للتمثيل؛ بنقر السهم الصغير المجاور لكلمة Unit: ، ثم أختار الرمز π.

6 يُمكِنني إظهار جميع نقاط القِيَم العظمى والصغرى على منحنى الاقتران؛ بنقر من شريط الأدوات، ثم اختيار Extremum ، ثم نقر منحنى الاقتران.

أتدرَّب

أُمثِّل كُلًّا من الاقترانات المثلثية الآتية بيانيًّا باستعمال برمجية جيوجبرا:

1 $f(x) = 5\sin x$

2 $f(x) = \cos(3 - x)$

3 $g(x) = 1 - \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

4 $g(x) = 2 - \cos x$

5 $g(x) = \frac{1}{2}\cos \pi x$

6 $g(x) = 3 + 2\sin 3(x + \pi)$

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 إذا كان $\cot\theta = 1$، فإنَّ $\tan\theta$ تساوي:

a) -1 b) 1

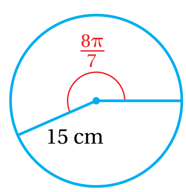
c) 0 d) 3

2 قياس الراديان الذي يساوي $56°$ هو:

a) $\frac{\pi}{15}$ b) $\frac{14\pi}{45}$

c) $\frac{7\pi}{45}$ d) $\frac{\pi}{3}$

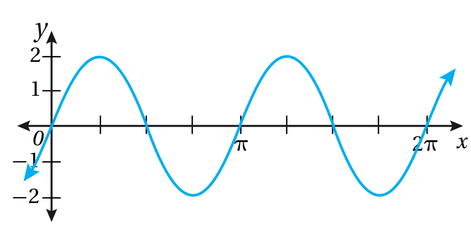
3 طول القـــوس المقابل للزاوية $\frac{8\pi}{7}$ في الدائرة المجـــاورة، مقرَّبًا إلى أقرب جزء من عشرة هو:



a) 4.2 cm b) 17.1 cm

c) 53.9 cm d) 2638.9 cm

4 قاعدة الاقتران التي تُمثِّل المنحنى الآتي هي:



a) $y = \frac{1}{2}\sin 4x$ b) $y = \frac{1}{4}\sin 2x$

c) $y = 2\sin 2x$ d) $y = 4\sin\frac{1}{2}x$

5 النقطة التي يوجد عندها قيمة عظمى للاقتران:
$y = -4\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ هي:

a) $\left(-\frac{\pi}{2}, 4\right)$ b) $\left(\frac{\pi}{2}, 4\right)$

c) $(0, 4)$ d) $(\pi, 4)$

أرسم في الوضع القياسي الزاوية التي عُلِم قياسها في ما يأتي:

6 $780°$ **7** $-570°$

8 $\frac{\pi}{12}$ **9** $\frac{5\pi}{2}$

أُحوِّل قياس الزاوية المكتوب بالدرجات إلى الراديان، وقياس الزاوية المكتوب بالراديان إلى الدرجات في كلٍّ ممّا يأتي:

10 $-720°$ **11** $315°$

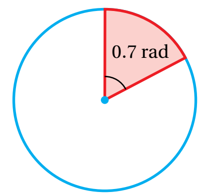
12 $\frac{13\pi}{8}$ **13** 3.5π

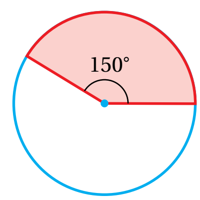
أجد زاويتين إحداهما قياســها موجب، والأُخرى قياســها ســالب، وكلتاهما مُشــترِكة في ضلع الانتهاء مع كل زاوية معطاة ممّا يأتي، ثم أرسمهما:

14 $-115°$ **15** $780°$

16 $-\frac{7\pi}{3}$ **17** $\frac{\pi}{9}$

أجد نصف قُطْر كل قطاع ممّا يأتي، علمًا بأنَّ مســاحة القطاع 12 وحدة مربعة:

18


19


أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

20 $\sec 300°$

21 $\tan 240°$

22 $\cos \frac{14\pi}{3}$

23 $\sec(-3\pi)$

أجــد قيمة كلٍّ مــن الاقترانــات المثلثية الخمســة المتبقية للزاوية θ في كلٍّ ممّا يأتي:

24 $\cos\theta = \frac{3}{5}, \tan\theta < 0$

25 $\sec\theta = 2, \sin\theta < 0$

أجد طول الدورة والسعة لكل اقتران ممّا يأتي، ثم أُمثِّله بيانيًّا:

26 $g(x) = 3\cos\pi(x + \frac{1}{2})$

27 $g(x) = 2\sin(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6})$

28 $g(x) = -5\sin(x - \frac{\pi}{2}) + 3$

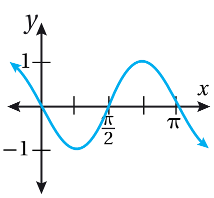
أكتب بجانب كل اقتران ممّا يأتي رمز التمثيل المناسب له من بين التمثيلات البيانية **(a–d)** الظاهرة أدناه:

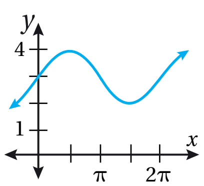
29 $g(x) = 3+\sin x$

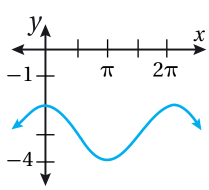
30 $g(x) = -3+\cos x$

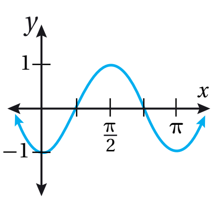
31 $g(x) = \sin 2(x-\frac{\pi}{2})$

32 $g(x) = \cos 2(x-\frac{\pi}{2})$

a)


b)


c)


d)


الوحدة 3

النهايات والمشتقّات
Limits and Derivatives

ما أهمّية هذه الوحدة؟

يُستعمل الاشتقاق في كثير من التطبيقات الحياتية، ومن ذلك؛ إيجاد معدّلات التغيّر بالنسبة إلى الزمن، مثل السرعة والتكاثر والتغيّر في درجات الحرارة، إضافة إلى أهمّيته في تحديد النقطة العظمى أو الصغرى، في كثير من المواقف، مثل تحديد أعلى ربح وأقل تكلفة.

تعلّمت سابقًا:

- ✓ تبسيط المقادير الجبرية النسبية.
- ✓ تمثيل الاقترانات المتشعّبة والاقترانات النسبية وكثيرات الحدود بيانيًّا.
- ✓ إيجاد المشتقّة الأولى لكثيرات الحدود.
- ✓ إيجاد القِيَم العظمى والصغرى لكثيرات الحدود.
- ✓ حلّ مسائل حياتية عن القِيَم العظمى والصغرى.

سأتعلّم في هذه الوحدة:

- ◄ إيجاد نهاية اقتران عند نقطة بيانيًّا وعدديًّا وجبريًّا، والبحث في اتّصاله عند نقطة.
- ◄ إيجاد مشتقّة اقترانات القوّة.
- ◄ استعمال قاعدة السلسلة؛ لإيجاد مشتقّة تركيب اقترانين.
- ◄ حلّ مسائل وتطبيقات حياتية على المشتقّات.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (41 – 30) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

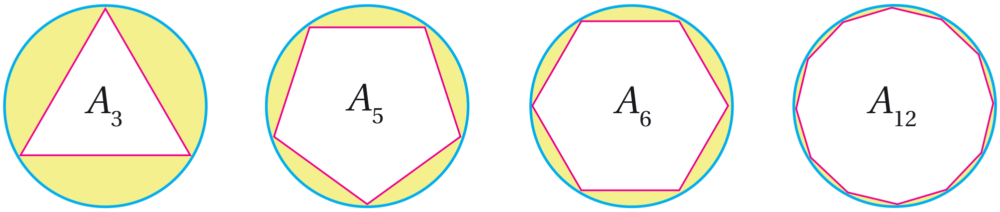
الدرس 1

النهايات والاتّصال
Limits and Continuity

فكرة الدرس
- إيجاد نهاية اقتران عند نقطة بيانيًّا وعدديًّا وجبريًّا.
- البحث في اتصال اقتران عند نقطة.

المصطلحات النهاية، الصيغة غير المحدّدة، الاقتران المتصل.

مسألة اليوم بالنظر إلى الأشــكال أدناه، كم تصبح مســاحة المنطقة المحصورة بين الدائــرة والمضلع المنتظم (A_n)، عندما تزداد قيمة n زيادة كبيرة جدًّا؟

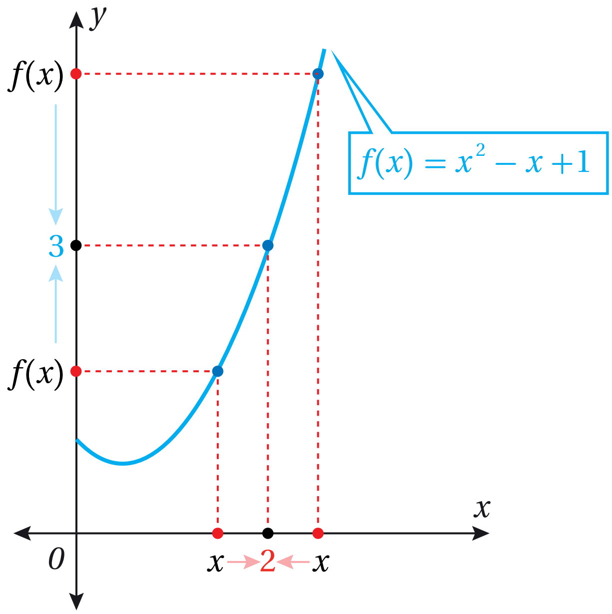


إيجاد النهايات بيانيًّا وعدديًّا

تعلّمتُ ســابقًا كثيرًا من خواصّ الاقترانات، مثل المجال والمدى والتزايد والتناقص، وذلك عــن طريق تحليل تمثيلاتها البيانية أو دراســة جــدول قِيَم يُمثّل الاقتران، وســأتعلّم في هذا الدرس تحليل سلوك اقتران معطى، وتحديد إذا كانت قِيَم الاقتران (المخرجات) تقترب أكثر فأكثر من عدد ما.

عندمــا تقترب قيــم x (المدخلات) أكثر فأكثر من عدد محدّد مثل (c)، عندها يُســمّى العدد الذي تقترب منه قيــم الاقتران **النهاية** (limit)، فمثلًا: إذا كان $f(x) = x^2 - x + 1$ واخترت قِيَمًا للمتغيّر x تقترب أكثر فأكثر من العدد 2، عندها سألاحظ من جدول القِيَم والتمثيل البياني الآتي لمنحنى $f(x)$ أنّه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (2) من جهة اليسار، فإنّ قِيَم $f(x)$ تقترب من العدد (3)، وكلّما اقتربت قِيَم x من العدد (2) من جهة اليمين، فإنّ قِيَم الاقتران تقترب من العدد (3)، عندها يُمكنني القول: إنّ نهاية $(x^2 - x + 1)$ هي 3 عندما تقترب x من العدد 2 من جهتَي اليمين واليسار، وتُكتب على الصورة:

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 1) = 3$$



→ 2 ←

x	1.9	1.95	1.99	1.995	1.999		2.001	2.005	2.01	2.05	2.1
$f(x)$	2.710000	2.852500	2.970100	2.985025	2.997001		3.003001	3.015025	3.030100	3.152500	3.310000

→ 3 ←

جهة اليسار　　　　جهة اليمين

النهاية عند نقطة

مفهوم أساسي

بالكلمات: إذا كانت قيمة الاقتران $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L عندما تقترب x من c؛ فإنّ نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.

بالرموز: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

وتُقرأ: نهاية الاقتران $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.

لغة الرياضيات

تُقرأ $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ أيضًا على الصورة: يقترب $f(x)$ من L عندما تقترب x من c.

عند كتابة $\lim\limits_{x \to c} f(x)$، فهذا يُشير إلى أنّ x تقترب من c من جهتَي اليمين واليسار، وإذا أردت تحديد الجهة التي تقترب منها قِيَم x من القيمة c، فإنّني أستعمل التعبيرين الآتيين:

- أستعملُ $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ للدلالة على النهاية من جهة اليسار، حيث $x < c$، وتُقرأ: نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c من اليسار.
- أستعملُ $\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$ للدلالة على النهاية من جهة اليمين، حيث $x > c$، وتُقرأ: نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c من اليمين.

وتكون نهاية الاقتران $f(x)$ عندما تقترب x من c موجودة؛ إذا كانت النهايتان من اليمين واليسار موجودتين ومتساويتين.

النهاية من الجهتين

مفهوم أساسي

بالكلمات: تكـون النهاية $f(x)$ موجودة عندما تقترب x من c، إذا وفقط إذا كانت النهايتان من اليمين واليسار موجودتين ومتساويتين.

بالرموز: $\lim_{x \to c} f(x) = L$ إذا وفقط إذا $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L$

لغة الرياضيات

(إذا وفقـط إذا) تعني أن صحة أي مـن العبارتين مرتبطـة بصحـة العبارة الأخرى، فإمّـا أن تكون كلا العبارتين صحيحتين، أو تكـون كلاهمـا غير صحيحتين.

مثال 1

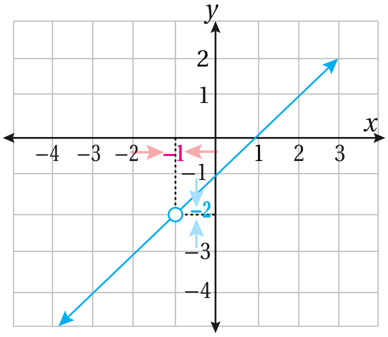
1 إذا كان $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$؛ فأجد $\lim_{x \to -1} f(x)$ بيانيًّا وعدديًّا.

الطريقة 1: إيجاد النهاية بيانيًّا.

إنّ مجـال الاقتـران $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ هـو مجموعة الأعـداد الحقيقية (R) مـا عدا -1 أو $(R - \{-1\})$، وبما أنّ:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x + 1} = x - 1$$

فإنّ التمثيل البياني لـ $f(x)$ هو نفسـه التمثيل البياني للمسـتقيم $y = x - 1$ مع دائـرة صغيرة غير مظلّلة عند $x = -1$ كما في الشكل المجاور.



أُلاحظ من التمثيل البياني لـ $f(x)$ أنّه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (-1) من الجهتين، فإنّ قِيَم $f(x)$ المقابلة لها تقترب من العدد (-2) من الجهتين، وهذا يعني أنّ:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = -2$$

الطريقة 2: إيجاد النهاية عدديًّا.

أُنشـئ جدول قِيَم باختيار قِيَم x القريبة من العدد -1 من كلا الجهتين، وإيجاد قيم $f(x)$ المقابلة لها باستعمال الآلة الحاسبة.

$\rightarrow -1 \leftarrow$

x	-1.1	-1.01	-1.001		-0.999	-0.99	-0.9
$f(x)$	-2.1	-2.01	-2.001		-1.999	-1.99	-1.9

$\rightarrow -2 \leftarrow$

جهة اليسار   جهة اليمين

أُفكّر

لمـاذا مجـال $f(x)$ هو مجموعـة الأعـداد الحقيقية ما عدا -1؟

إرشاد

أُلاحظ أنّ الاقتران $f(x)$ غير معرّف عند $x = -1$، إلّا أنّ النهايـة موجـودة عندما $x \to -1$

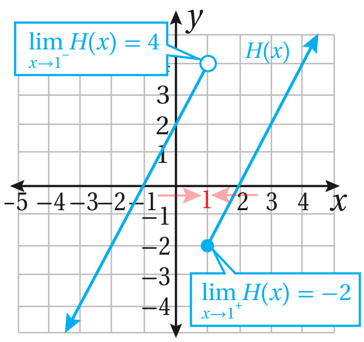
أُلاحظ أنّه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (-1) من الجهتين؛ فإنّ قيمة $f(x)$ المقابلة لها تقترب من العدد (-2)، وهذا يعني أنّ:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = -2$$

أُلاحظ ممّا سبق، أنّ قيمة النهاية متساوية في كلا الطريقتين.

2 إذا كان $H(x)=\begin{cases} 2x+2 & ,x<1 \\ 2x-4 & ,x\geq 1 \end{cases}$، فأجد $\lim\limits_{x\to 1} H(x)$

الطريقة 1: إيجاد النهاية بيانيًّا.



إنّ الاقتران $H(x)$ متشعّب، وتمثيله البياني كما يظهر في الشكل المجاور. أُلاحظ من التمثيل البياني أنّه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (1) من جهة اليسار، فإنّ قِيَم $H(x)$ المقابلة لها تقترب من العدد (4)، وهذا يعني أنّ:

$$\lim_{x\to 1^-} H(x) = 4$$

ولكن، كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (1) من جهة اليمين؛ فإنّ قِيَم $H(x)$ المقابلة لها تقترب من العدد (-2)، وهذا يعني أنّ:

$$\lim_{x\to 1^+} H(x) = -2$$

وبما أنّ النهايتين من اليمين ومن اليسار غير متساويتين؛ فإنّ $\lim\limits_{x\to 1} H(x)$ غير موجودة.

إرشاد

أُلاحظ أنّ $H(1) = -2$، ما يعني أنّ الاقتران معرّف عند $x = 1$، ولكن النهاية عندما تقترب x من العدد (1) غير موجودة.

الطريقة 2: إيجاد النهاية عدديًّا.

أُنشئ جدول قِيَم باختيار قِيَم x القريبة من العدد 1 من كلا الجهتين، وإيجاد قيم $f(x)$ المقابلة لها باستعمال الآلة الحاسبة.

$\rightarrow$ 1 $\leftarrow$

x	0.9	0.99	0.999		1.001	1.01	1.1
$f(x)$	3.8	3.98	3.998		-1.998	-1.98	-1.8

جهة اليسار $\rightarrow$ 4 -2 $\leftarrow$ جهة اليمين

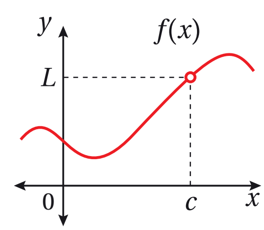
أُلاحظ أنّه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (1) من جهة اليسار، فإنّ قِيَم $H(x)$ المقابلة لها تقترب من العدد (4)، وأنّه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (1) من جهة اليمين، فإنّ قِيَم $H(x)$ المقابلة لها تقترب من العدد (-2)، وبما أنّ النهايتين من اليمين ومن اليسار غير متساويتين؛ فإنّ $\lim\limits_{x\to 1} H(x)$ غير موجودة.

🖉 **أتحقّق من فهمي** أجد كلّ نهاية مما يأتي بيانيًّا وعدديًّا:

b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)\ ,\ f(x) = \begin{cases} x & , x \le 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$

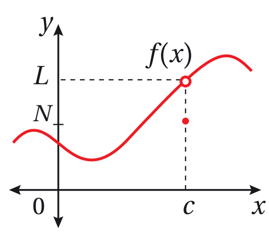
a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

أُلاحظ من المثال السابق، أنّ نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من العدد c لا علاقة لها بقيمة $f(c)$، فمثلًا $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ في الحالات الثلاث الآتية:



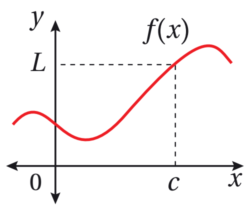
$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

$f(c)$ غير معرّفة



$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

$f(c) = N$



$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

$f(c) = L$

إيجاد النهايات جبريًّا

تعلّمتُ في الأمثلة السابقة كيفية إيجاد النهايات بيانيًّا وعدديًّا، وسأتعلّم الآن طرائق جبرية لإيجاد النهايات.

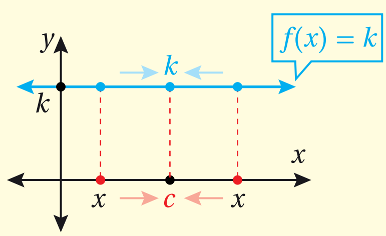
نهايات الاقترانات

مفهوم أساسي

نهاية الاقتران الثابت

بالكلمات: نهاية الاقتران الثابت عند أيّ نقطة c هي القيمة الثابتة للاقتران.

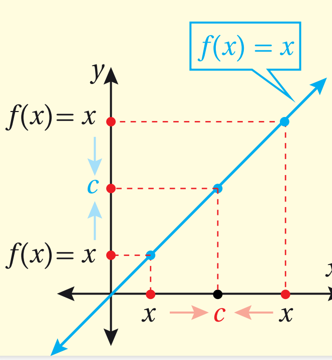
بالرموز: $\lim\limits_{x \to c} k = k$



نهاية الاقتران المحايد

بالكلمات: نهاية الاقتران $f(x) = x$ عند النقطة c هي c.

بالرموز: $\lim\limits_{x \to c} x = c$



وتُعدّ الخصائص الآتية أدوات أساسية لإيجاد النهايات جبريًّا:

خصائص النهايات

مفهوم أساسي

إذا كان k, c عددين حقيقيّين، و n عددًا صحيحًا موجبًا، وكانت النهايتان $\lim_{x \to c} f(x), \lim_{x \to c} g(x)$ موجودتين؛ فإنّ كلًّا من الخصائص الآتية صحيحة:

خاصّية المجموع: **1)** $\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$

خاصّية الفرق: **2)** $\lim_{x \to c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$

خاصّية الضرب في ثابت: **3)** $\lim_{x \to c} (k\,f(x)) = k \lim_{x \to c} f(x)$

خاصّية الضرب: **4)** $\lim_{x \to c} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) \times \lim_{x \to c} g(x)$

خاصّية القسمة: **5)** $\lim_{x \to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}, \quad \lim_{x \to c} g(x) \neq 0$

خاصّية القوّة: **6)** $\lim_{x \to c} (f(x))^n = (\lim_{x \to c} f(x))^n$

خاصّية الجذر النوني: **7)** $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$

شريطة أن تكون $\lim_{x \to c} f(x) > 0$ عندما يكون n عددًا زوجيًّا.

مثال 2

أستعملُ خصائص النهايات لحساب كلّ نهاية ممّا يأتي:

1 $\lim_{x \to -1} (x^3 - 4x + 6)$

$$\lim_{x \to -1} (x^3 - 4x + 6) = \lim_{x \to -1} x^3 - \lim_{x \to -1} 4x + \lim_{x \to -1} 6$$
خاصّيتا المجموع والفرق

$$= (\lim_{x \to -1} x)^3 - 4 \lim_{x \to -1} x + \lim_{x \to -1} 6$$
خاصّيتا القوة والضرب في ثابت

$$= (-1)^3 - 4(-1) + 6$$
نهايتا الاقتران الثابت والاقتران المحايد

$$= 9$$
بالتبسيط

2 $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt{\dfrac{x^2}{x-1}}$

$$\lim_{x \to 5} \sqrt{\frac{x^2}{x-1}} = \sqrt{\lim_{x \to 5} \frac{x^2}{x-1}}$$ خاصّية الجذر النوني

$$= \sqrt{\frac{\lim\limits_{x \to 5} x^2}{\lim\limits_{x \to 5} (x-1)}}$$ خاصّية القسمة

$$= \sqrt{\frac{(\lim\limits_{x \to 5} x)^2}{\lim\limits_{x \to 5} x - \lim\limits_{x \to 5} 1}}$$ خاصّية القوّة والفرق

$$= \sqrt{\frac{(5)^2}{5-1}}$$ نهايتا الاقتران الثابت والاقتران المحايد

$$= \frac{5}{2}$$ بالتبسيط

أتذكّر

في الفرع 2 مـن المثال، يجـب التحقّـق أنّ $\lim\limits_{x \to c} f(x) > 0$ ؛ لأنّ دليل الجذر عدد زوجي.

أتحقّق من فهمي

أستعملُ خصائص النهايات لحساب كلّ نهاية ممّا يأتي:

a) $\lim\limits_{x \to 1} (2x^3 + 3x^2 - 4)$

b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{1 + 3x^2}}{3x - 2}$

في المثال الســابق، أُلاحظ أنّ نهاية كلّ اقتران عندما تقترب x من c تساوي $f(c)$؛ لذا، أستنتج أنّه يُمكـن إيجاد هذه النهايـات **بالتعويض المباشـر**، ولكن هذا لا ينطبق علـى الاقترانات جميعها، إلّا أنّه ينطبق على اقترانات كثيرات الحدود، والاقترانات النسـبية ما دامت قيمة مقام الاقتران النسبي عند c لا تساوي صفرًا.

مفهوم أساسي **النهايات بالتعويض المباشر**

نهايات كثيرات الحدود

إذا كان $f(x)$ كثير حدود، وكان c عددًا حقيقيًّا؛ فإنّ:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

نهايات الاقترانات النسبية

إذا كان $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ اقترانًا نسبيًّا، وكان c عددًا حقيقيًّا، فإنّ:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) = \frac{p(c)}{q(c)}, \ q(c) \neq 0$$

مثال 3

أجد كلّ نهاية ممّا يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلّا فأذكرُ السبب:

1 $\lim\limits_{x \to 2} (x^4 - 5x^3 + x^2 - 7)$

بما أنّها نهاية كثير حدود، إذن: يُمكن إيجادها بالتعويض المباشر.

$$\lim_{x \to 2} (x^4 - 5x^3 + x^2 - 7) = (2)^4 - 5(2)^3 + (2)^2 - 7$$ بالتعويض المباشر

$$= -27$$ بالتبسيط

2 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 5x}{x^4 + 2}$

بما أنّ $x = -1$ تقع في مجال الاقتران النسبي (ليست صفر مقام)، إذن: يُمكن إيجاد النهاية بالتعويض المباشر.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 5x}{x^4 + 2} = \frac{(-1)^2 + 5(-1)}{(-1)^4 + 2}$$ بالتعويض المباشر

$$= -\frac{4}{3}$$ بالتبسيط

3 $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - x - 12}{x + 3}$

بما أنّ $x = -3$ لا تقع في مجال الاقتران النسبي (المقام يساوي صفرًا عندها)، إذن: لا يُمكن إيجاد النهاية بالتعويض المباشر.

أتحقّق من فهمي

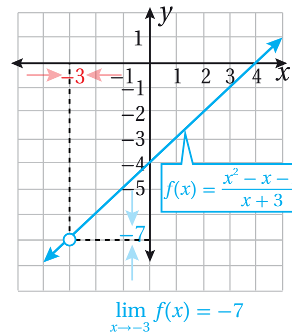
أجد كلّ نهاية ممّا يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلّا فأذكرُ السبب:

a) $\lim\limits_{x \to 2} (3x^2 - 5x + 4)$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{1 + 4x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 5x - 6}{x^2 - 2}$

d) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$



إنّ ناتــج التعويض المباشــر فــي الفرع 3 من المثــال الســابق $\left(\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - x - 12}{x + 3}\right)$ يُعطي الناتج $\frac{0}{0}$ ، وتُسمّى هذه النتيجة **الصيغة غير المحددة** (indeterminate form)، ولكنّ هذا لا يعني أنّ النهاية غير موجودة، فالتمثيل البياني المجاور للاقتران $f(x) = \frac{x^2 - x - 12}{x + 3}$ يُظهر أنّ النهاية موجودة عند $x = -3$ وتساوي -7

نحتاج في مثل هذه الحالة (ناتج التعويض المباشر $\frac{0}{0}$) إلى البحث عن صيغة مكافئة للاقتران، عن طريق تبسيطه جبريًّا؛ وذلك بتحليل كلّ من البسط والمقام واختصار العوامل المشتركة، أو إنطاق البسط أو المقام واختصار العوامل المشتركة.

مثال 4

أجد كلّ نهاية ممّا يأتي:

1 $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - x - 12}{x + 3}$

بما أنّ ناتج التعويض المباشر $\frac{0}{0}$، أُحلّل المقدار جبريًّا وأختصر العوامل المشتركة بين البسط والمقام.

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - x - 12}{x + 3} = \lim_{x \to -3} \frac{(x - 4)(x + 3)}{x + 3}$$ بتحليل ثلاثي الحدود

$$= \lim_{x \to -3} \frac{(x - 4)\cancel{(x + 3)}}{\cancel{x + 3}}$$ باختصار العامل المشترك

$$= \lim_{x \to -3} (x - 4)$$ بالتبسيط

$$= -3 - 4 = -7$$ بالتعويض المباشر والتبسيط

2 $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x + 1} - 1}{x}$

بما أنّ ناتج التعويض المباشر $\frac{0}{0}$، أُنْطِقُ البسط أولًا، ثمّ أختصر العوامل المشتركة.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x + 1} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x + 1} - 1}{x} \times \frac{\sqrt{x + 1} + 1}{\sqrt{x + 1} + 1}$$ أضرب كلًّا من البسط والمقام بالمرافق $(\sqrt{x+1} + 1)$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x + 1 - 1}{x(\sqrt{x + 1} + 1)}$$ بالتبسيط

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x + 1} + 1)}$$ بالتبسيط

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + 1} + 1}$$ باختصار العامل المشترك

$$= \frac{1}{2}$$ بالتعويض المباشر

أتذكّر

تعلّمت سابقًا كيف أتخلّص من الجذر في المقدار النسبي عن طريق عملية تُسمّى (إنطاق المقام) تتضمّن ضرب البسط والمقام في مقدار جذري، بحيث لا يحوي ناتج الضرب جذورًا في المقام، وبالطريقة نفسها يمكن إنطاق البسط.

3 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$

بما أنّ ناتج التعويض المباشر $\frac{0}{0}$، أحتاج إلى تبسيط المقدار النسبي عن طريق إعادة تعريف القيمة المطلقة أولًا، ثمّ اختصار العوامل المشتركة بين البسط والمقام.

الخطوة 1: أُعيد تعريف الاقتران.

$$f(x) = \frac{|x-2|}{x-2} = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x-2} & , x > 2 \\ \dfrac{-(x-2)}{x-2} & , x < 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & , x > 2 \\ -1 & , x < 2 \end{cases}$$

الخطوة 2: أجد النهاية من جهة اليمين ومن جهة اليسار.

أُلاحظ أنّه توجد قاعدتان مختلفتان عن يمين العدد 2 وعن يساره؛ لذا، يجب إيجاد النهاية من اليمين والنهاية من اليسار.

النهاية من جهة اليسار $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (-1) = -1$

النهاية من جهة اليمين $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (1) = 1$

وبما أنّ النهايتين من اليمين ومن اليسار غير متساويتين؛ فإنّ $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$ غير موجودة.

أتحقّق من فهمي

أجد كلّ نهاية ممّا يأتي:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{7x - x^2}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-\sqrt{x+4}}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{|x-5|}{x-5}$

أتذكّر

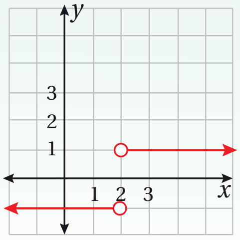
إعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة: هي إعادة كتابة اقتران القيمة المطلقة على صورة اقتران متشعّب، من دون استعمال رمز القيمة المطلقة.

أفكّر

لماذا لم توضع إشارة المساواة في أيٍّ من المتباينتين عند إعادة تعريف الاقتران؟

الدعم البياني

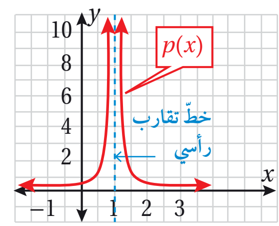
أُلاحظ من التمثيل البياني للاقتران $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2}$ أنّ النهاية غير موجودة.



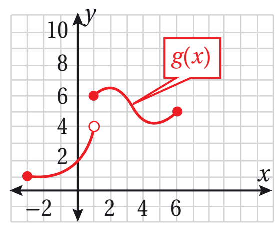
الاتّصال

يكون **الاقتران متّصلًا** (continuous function) إذا لم يكن في تمثيله البياني أيّ انقطاع أو قفزة أو فجوة، ويكون الاقتران متّصلًا عند نقطة إذا كان منحناه يمرّ عبر هذه النقطة دون انقطاع.

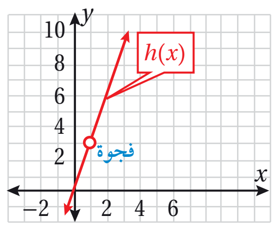
توضّح التمثيلات البيانية الآتية بعض حالات الاتصال أو عدم الاتصال:



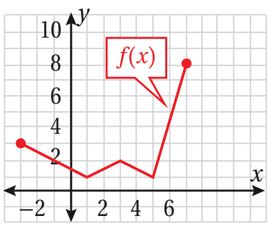
غير متّصل عند $x = 1$



غير متّصل عند $x = 1$



غير متّصل عند $x = 1$



متّصل عند $x = 1$

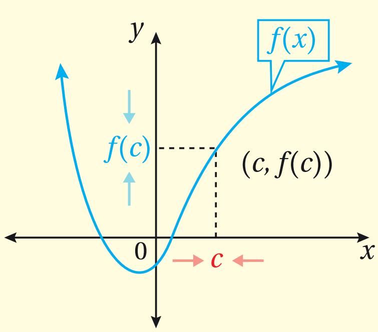
أُلاحـظ أنّ منحنيي الاقترانين $p(x)$ و $h(x)$ أعلاه غير متّصلين عند $(x = 1)$؛ لأنّ كلًّا من الاقترانين غير معرّف عند $(x = 1)$ على الرغم من أنّ نهاية الاقتران $h(x)$ موجودة عندما $(x = 1)$. أمّا الاقتران $g(x)$ فإنّه غير متّصل عند $(x = 1)$ بسـبب وجود قفزة (ما يعني أنّ النهاية غير موجودة).

ممّا سبق، يُمكن التوصّل إلى أنّ الاقتران يكون متّصلًا عند نقطة إذا كانت النهاية تساوي قيمة الاقتران عند تلك النقطة.

مفهوم أساسي **الاتّصال عند نقطة**

يكون الاقتران $f(x)$ متّصلًا عند النقطة $x = c$ إذا حقّق الشروط الآتية جميعها:

- $f(x)$ مُعرّف عند c.
- $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ موجودة.
- $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$



أتذكّر

النهاية موجودة تعني أنّ نهايتي اليمين واليسار متساويتان، ووجود النهاية عند نقطة لا يعني بالضرورة أنّ الاقتران معرّف عند تلك النقطة.

مثال 5

أُحدّد إذا كان كلّ اقتران ممّا يأتي متّصلًا عند قيمة x المعطاة، وأبرّر إجابتي:

1 $$h(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & , x \le -1 \\ x - 1 & , x > -1 \end{cases} \quad , x = -1$$

لتحديد إذا كان الاقتران h متّصلًا عند $x = -1$، يجب التحقّق من أنّ $h(x)$ مُعرَّف عند $x = -1$، وأنّ $\lim\limits_{x \to -1} h(x) = h(-1)$.

- $h(-1) = (-1)^2 - 3 = -2$
- $\lim\limits_{x \to -1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (x^2 - 3) = -2$

- $\lim\limits_{x \to -1^+} h(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (x - 1) = -2$

بما أنّ $\lim\limits_{x \to -1^+} h(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} h(x) = -2$، فإنّ $\lim\limits_{x \to -1} h(x) = -2$

وبما أنّ $\lim\limits_{x \to -1} h(x) = h(-1) = -2$، إذن: $h(x)$ متّصل عند $x = -1$.

2 $f(x) = x^3 - x \;,\; x = 3$

لتحديد إذا كان الاقتران f متّصلًا عند $x = 3$، يجب التحقّق من أنّ $f(x)$ معرّف عند $x = 3$، وأنّ $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$.

- $f(3) = (3)^3 - (3) = 24$
- $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = (3)^3 - (3) = 24$

بما أنّ $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$، إذن: $f(x)$ متصل عند $x = 3$.

3 $g(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} \;,\; x = 2$

الاقتران g غير متّصل عند $x = 2$؛ لأنه غير معرّف عند $x = 2$ (صفر مقام).

أتحقّق من فهمي

أُحدّد إذا كان كلّ اقتران ممّا يأتي متّصلًا عند قيمة x المعطاة، وأبرّر إجابتي:

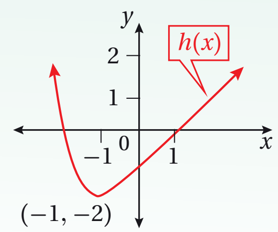
a) $f(x) = x^5 + 2x^3 - x \;,\; x = 1$

b) $g(x) = \dfrac{x^2 + 16}{x - 5} \;,\; x = 5$

c) $h(x) = \begin{cases} x - 1 & , x < 3 \\ 5 - x & , x \geq 3 \end{cases} \;,\; x = 3$

الدعم البياني

يوضح التمثيل البياني الآتي للاقتران $h(x)$ أنّه متصل عند $x = -1$.



أتذكّر

يمكن إيجاد نهاية كثيرات الحدود بالتعويض المباشر.

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد كلًّا من النهايات الآتية بيانيًّا وعدديًّا:

1 $\lim\limits_{x \to 3} (x + 7)$

2 $\lim\limits_{x \to 0} |x|$

3 $\lim\limits_{x \to -1} (x^2 - 5)$

4 $\lim\limits_{x \to 3} f(x), f(x) = \begin{cases} -1 & , x \neq 3 \\ 1 & , x = 3 \end{cases}$

5 $\lim\limits_{x \to -2} p(x), p(x) = \begin{cases} x + 6 & , x < -2 \\ -\frac{1}{2} x + 1 & , x > -2 \end{cases}$

أجد كلّ نهاية ممّا يأتي:

6 $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 4x + 7)$

7 $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$

8 $\lim\limits_{x \to 9} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

9 $\lim\limits_{x \to 2\pi} (x^3 + \pi x - 5\pi^3)$

10 $\lim\limits_{x \to -3} \sqrt{\frac{x - 3}{2x + 4}}$

11 $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt[3]{x^2 + 11}$

12 $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$

13 $\lim\limits_{x \to -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{x + 1}$

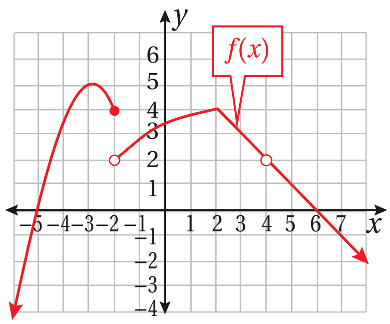
14 $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{|x - 2|}$

15 $\lim\limits_{x \to 3} f(x), f(x) = \begin{cases} x - 1 & , x < 3 \\ 3x - 7 & , x > 3 \end{cases}$

16 $\lim\limits_{t \to 4} \frac{\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2}}{t - 4}$

17 $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$

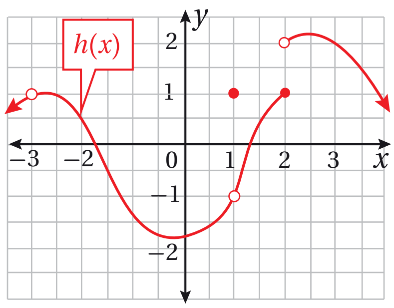
أستعملُ التمثيل البياني؛ لأجد كلّ نهاية ممّا يأتي:



18 $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

19 $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$

أستعملُ التمثيل البياني؛ لأجد كلّ نهاية ممّا يأتي:



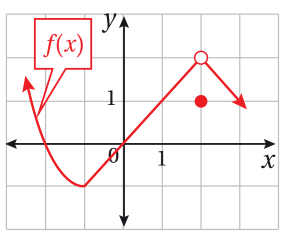
20 $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$

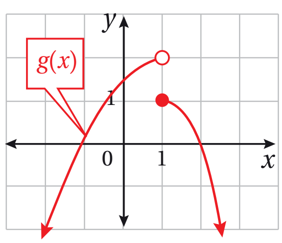
21 $\lim\limits_{x \to 2^+} h(x)$

22 $\lim\limits_{x \to 3} h(x)$

23 إذا كان $f(x) = ax^2 + bx + c$، حيث $a \neq 0$، وكان $f(0) = 0$، $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5$، $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 8$؛ فأجد قِيَم الثوابت a و b و c.

أستعملُ التمثيلين البيانيين المجاورين؛ لأجد كلّ نهاية ممّا يأتي:





24 $\lim\limits_{x \to 2} (f(x) + g(x))$

25 $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{3 + f(x)}$

26 $\lim\limits_{x \to 0} (f(x) \times g(x))$

أُحدّد إذا كان كلّ اقتران ممّا يأتي متّصلًا عند قيمة x المعطاة، وأبرّر إجابتي:

27 $f(x) = \pi x^2 + 4.2x + 7 \ , x = -5$

28 $g(x) = \dfrac{16}{x^2 + 25} \ , x = -5$

29 $h(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 0 \\ 3 & , x \geq 0 \end{cases} \ , x = 0$

مهارات التفكير العليا

30 تبرير: إذا كان $f(x) = \begin{cases} x + 3 & , x \neq 3 \\ 2 + \sqrt{k} & , x = 3 \end{cases}$، متّصلًا عند $x = 3$؛ فأجد قيمة الثابت k.

31 تبرير: أجد قيمة الثابت a التي تجعل $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{a}{x^2 - 1} \right)$ موجودة، وأبرّر إجابتي.

الدرس 2

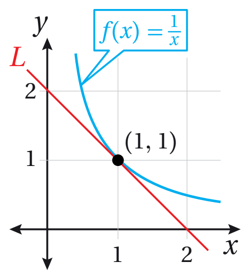
الاشتقاق
Differentiation

فكرة الدرس

- إيجاد مشتقّة اقتران القوّة باستعمال التعريف العام.
- اشتقاق اقتران القوّة.
- إيجاد معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس لمنحنى اقتران القوّة عند نقطة ما.

المصطلحات التعريف العام للمشتقّة، اقتران القوّة، العمودي على المماس.

مسألة اليوم يُبيّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{1}{x}, x > 0$:

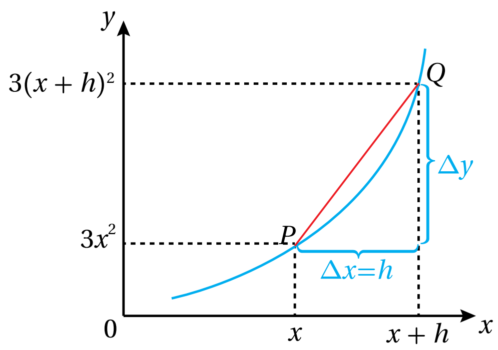


1) أجد ميل منحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $(1, 1)$.

2) أجد ميل المستقيم L.

3) ما العلاقة بين ميل منحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $(1, 1)$ وميل المستقيم L؟

التعريف العام للمشتقّة



إذا علمتُ أنّ النقطة Q على منحنى الاقتران $y = 3x^2$ تبعد مسافة أفقية صغيرة مقدارها h عن النقطة $P(x, 3x^2)$ كما يظهر في الشكل المجاور، فإنّ إحداثيَي النقطة Q هما: $(x + h, 3(x + h)^2)$

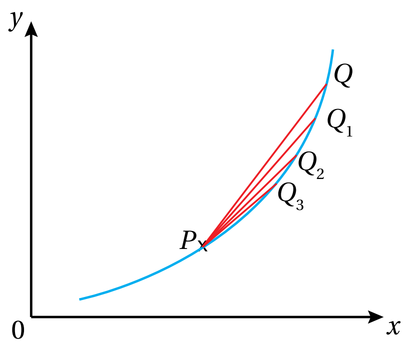
إذن: ميل القاطع $\overline{PQ}$ يساوي:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \frac{3(x+h)^2 - 3x^2}{(x+h) - x}$$

$$= \frac{3x^2 + 6hx + 3h^2 - 3x^2}{h}$$

$$= \frac{6hx + 3h^2}{h} = 6x + 3h$$



أُلاحظ أنّه في أثناء حركة النقطة Q على منحنى الاقتران نحو النقطة P فإنّها تمر بالنقاط Q_1 و Q_2 و Q_3، وأُلاحظ كذلك أنّ ميل كلّ من القواطع $\overline{PQ_1}$ و $\overline{PQ_2}$ و $\overline{PQ_3}$ يقترب شيئًا فشيئًا من ميل المماس عند النقطة P.

أتعلّم

ميل المماس يساوي ميل منحنى الاقتران عند نقطة التماس.

رموز رياضية

يُرمز إلى مشتقّة $y = f(x)$ بالرموز الآتية:

$f'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{d}{dx}(f(x)), y'$

وعندما تقترب Q من P؛ فإنّ h تصبح أصغر فأصغر، وعندها يُمكنني القول: إنّ h تقترب من الصفر، وتُكتب على الصورة $h \to 0$.

ومنه: يكون ميل المماس (m) عند النقطة P يساوي نهاية $6x + 3h$ عندما $h \to 0$

$$m = \lim_{h\to 0} (6x + 3h) = 6x$$

تُسمى $6x$ مشتقّة الاقتران $y = 3x^2$، ويُرمز إليها بالرمز $\frac{dy}{dx}$.

إذن: إذا كان $y = 3x^2$ فإنّ $\frac{dy}{dx} = 6x$

تُسمّى هذه الطريقة في إيجاد مشتقّة اقتران عند أي نقطة **التعريف العام للمشتقّة** (the definition of the derivative).

مفهوم أساسي **التعريف العام للمشتقّة**

مشتقّة الاقتران f بالنسبة إلى المتغير x هي f' الذي قيمته عند x هي:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

وبشرط وجود النهاية.

مثال 1

أجد مشتقّة الاقتران $y = x^3$ باستعمال التعريف العام للمشتقّة.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ التعريف العام للمشتقّة

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$ بتعويض $f(x+h)=(x+h)^3,\ f(x) = x^3$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3 - x^3}{h}$$ بالتبسيط

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2 + 3hx + h^2)}{h}$$ بإخراج h عاملًا مشتركًا من البسط

$$= \lim_{h\to 0} (3x^2 + 3hx + h^2)$$ بالقسمة على h

$$= 3x^2$$ بتعويض $h = 0$

معلومة

يعود تاريخ إيجاد المشتقّة باستعمال النهايات إلى القرن السابع عشر الميلادي، ويرتبط بالرياضيين: إسحاق نيوتن، وغوتفريد لايبنتس؛ إذ اكتشفاه بصورة مستقلّة.

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقّة الاقتران $y = 8 - x^2$ باستعمال التعريف العام للمشتقّة.

يُمكن أيضًا استعمال التعريف العام للمشتقّة لإيجاد مشتقّة اقتران عند قيمة مُحدَّدة من مجاله.

مثال 2

أجد مشتقّة الاقتران $f(x) = x^2$ باستعمال التعريف العام للمشتقّة عندما $x = 3$.

التعريف العام للمشتقّة
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

بتعويض $x = 3$
$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

بتعويض $f(3+h) = (3+h)^2,\ f(3) = (3)^2$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - (3)^2}{h}$$

بالتبسيط
$$= \lim_{h \to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h}$$

بإخراج h عاملًا مشتركًا من البسط
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(6+h)}{h}$$

بالقسمة على h
$$= \lim_{h \to 0} (6+h)$$

بتعويض $h = 0$
$$= 6$$

أتعلّم

$f(x+h) \neq f(x) + f(h)$

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقّة الاقتران $f(x) = 4x^2 + 1$ باستعمال التعريف العام للمشتقّة؛ عندما $x = -1$.

مشتقّة اقترانات القوّة

يُسمّى الاقتران $f(x) = x^n$، حيث n عدد حقيقي، **اقتران قوّة** (power function)، ومن أمثلته:

$$f(x) = x^7 \quad , \quad g(x) = \frac{1}{x^3} \quad , \quad h(x) = \sqrt{x^3}$$

إنّ إيجاد المشتقّة باستعمال التعريف العام للمشتقّة ليس سهلًا في كثير من الأحيان؛ ولكن توجد بعض القواعد التي تُسهّل عملية إيجاد المشتقّة، ومنها: مشتقّة اقتران القوّة.

مشتقّة اقتران القوّة

مفهوم أساسي

بالكلمات: عند اشتقاق الاقتران $y = x^n$، حيث n عدد حقيقي؛ فإنّ أسّ x في المشتقّة يكون أقل بواحد من أسّ x في الاقتران الأصلي، ويكون معامل x في المشتقّة مساويًا لأسّ x في الاقتران الأصلي.

بالرموز: إذا كان $y = x^n$، حيث n عدد حقيقي؛ فإنّ $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$.

مثال 3

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي:

1 $y = \frac{1}{x}$

$y = \frac{1}{x} = x^{-1}$ بكتابة الاقتران على الصورة الأُسّية

$\frac{dy}{dx} = -1x^{-1-1}$ قاعدة مشتقّة اقتران القوّة

$= -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$ تعريف الأُسّ السالب

2 $y = x^{\frac{3}{2}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}$ قاعدة مشتقّة اقتران القوّة

$= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ بالتبسيط

3 $y = \sqrt{x}$

$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ بكتابة الاقتران على الصورة الأُسّية

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$ قاعدة مشتقّة اقتران القوّة

$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ تعريف الأُسّ السالب والجذر التربيعي

أتذكّر

لأيّ عدد حقيقي a، ولأيّ عددين صحيحين m و n، حيث $n > 1$:

- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

حيث $\frac{m}{n}$ في أبسط صورة، إلّا إذا كانت $a < 0$، و n عددًا زوجيًّا فإن الجذر يكون غير مُعرَّف.

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي:

a) $y = x^{-11}$

b) $y = \frac{1}{x^5}$

c) $y = \sqrt[3]{x^5}$

توجد أيضًا بعض القواعد التي تُسهّل عملية إيجاد مشتقّة الاقترانات التي بعض حدودها اقترانات قوّة.

مفهوم أساسي

قواعد أخرى لمشتقّة اقترانات القوّة

مشـــتقّة الثابت: إذا كان $y = c$ حيث c عدد حقيقي؛ فإنّ $\frac{dy}{dx} = 0$، أي إنّ مشـــتقّة الثابت تساوي صفرًا.

مشتقّة مضاعفات القوّة: إذا كان $y = ax^n$ ، حيث n و a عددان حقيقيان؛ فإنّ $\frac{dy}{dx} = anx^{n-1}$.

مشتقّة المجموع ومشتقّة الفرق: إذا كان $y = u(x) \pm v(x)$، حيث u وv اقترانا قوّة؛ فإنّ $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$.

مثال 4

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي:

1 $\boldsymbol{y = x + 2\sqrt[3]{x}}$

$y = x + 2\sqrt[3]{x} = x + 2x^{\frac{1}{3}}$ بكتابة حدود الاقتران على الصورة الأُسّية

$\frac{dy}{dx} = 1 + 2 \times \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$ قاعدتا مشتقّتَي مضاعفات القوى، والمجموع

$= 1 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$ تعريف الأُسّ السالب والجذر

2 $\boldsymbol{y = \frac{5 - 7x}{x}}$

$y = \frac{5 - 7x}{x} = \frac{5}{x} - \frac{7x}{x}$ بقسمة كلّ حد في البسط على x

$= 5x^{-1} - 7$ بكتابة حدود الاقتران على الصورة الأُسّية

$\frac{dy}{dx} = (-5)x^{-2} - 0$ قواعد مشتقّات الثابت، ومضاعفات القوّة، والفرق

$= -\frac{5}{x^2}$ تعريف الأُسّ السالب

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي:

a) $y = \sqrt{x} + \frac{4}{x^2}$

b) $y = \frac{x^5 - 8x^6}{4x}$

معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس عند نقطة

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ مشتقّة الاقتران عند نقطة واقعة على منحناه هي ميل المماس عند هذه النقطة. ومن ثَمَّ يُمكِن استعمال المشتقّة لإيجاد معادلة مماس منحنى الاقتران عند النقطة نفسها.

أتذكَّر

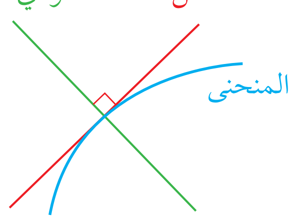
معادلة المستقيم الذي ميله m، والمارُّ بالنقطة (x_1, y_1) هي: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

مفهوم أساسي — **معادلة مماس منحنى الاقتران**

إذا كان $f(x)$ اقترانًا، فإنَّ معادلة مماس منحنى $f(x)$ عند نقطة التماس $(a, f(a))$ هي:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

العمودي على المماس (the normal) عند نقطة التماس هو مستقيم يصنع زاوية قائمة مع مماس منحنى الاقتران عند هذه النقطة، ويمكن استعمال ميل المماس لإيجاد ميل العمودي على المماس ومعادلته.



أتذكَّر

إذا تعامد مستقيمان، كلٌّ منهما ليس رأسيًّا، فإنَّ حاصل ضرب ميليهما هو (-1)؛ أيْ إنَّ ميل أحدهما يساوي سالب مقلوب ميل الآخر.

مفهوم أساسي — **معادلة العمودي على المماس**

إذا كان $f(x)$ اقترانًا، وكان: $f'(a) \neq 0$، فإنَّ معادلة العمودي على المماس لمنحنى $f(x)$ عند نقطة التماس $(a, f(a))$ هي:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

مثال 5

إذا كان الاقتران $y = x - \frac{1}{8}x^2$، فأستعمل المشتقّة لإيجاد كلّ ممّا يأتي:

1 معادلة المماس عند النقطة (6, 1.5).

الخطوة 1: أجد ميل المماس عند النقطة (6, 1.5).

الاقتران المعطى
$$y = x - \frac{1}{8}x^2$$

قاعدة مشتقّة اقتران القوّة والفرق
$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{4}x$$

بتعويض $x = 6$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=6} = 1 - \frac{1}{4}(6)$$

بالتبسيط
$$= -0.5$$

الخطوة 2: أجد معادلة المماس.

معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

بتعويض $x_1 = 6$, $y_1 = 1.5$, $m = -0.5$
$$y - 1.5 = -0.5\,(x - 6)$$

بالتبسيط
$$y = -0.5x + 4.5$$

إذن: معادلة المماس هي: $y = -0.5x + 4.5$

رموز رياضية

يُستعمل الرمز $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ للدلالة على قيمة المشتقّة عندما $x = a$

2 معادلة العمودي على المماس عند النقطة (6, 1.5).

بما أنّ ميل المماس عند النقطة (6, 1.5) يساوي -0.5 فإنّ ميل العمودي على المماس يساوي 2، ومنه: فإنّ معادلة العمودي على المماس عند النقطة (6, 1.5) هي:

$$y - 1.5 = 2(x - 6)$$

$$y = 2x - 10.5$$

أتذكّر

إذا تعامد مستقيمان؛ فإنّ حاصل ضرب ميليهما يساوي -1

أتحقّق من فهمي

إذا كان الاقتران $y = 8x - \frac{1}{x}$ ؛ فأستعمل المشتقّة لإيجاد معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس عن النقطة (0.25, −2).

إيجاد نقطة التماس إذا عُلِم ميل المماس

تعلَّمْتُ في المثال السابق إيجاد معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران إذا عُلِمت نقطة التماس. والآن سأتعلَّم كيف أجد نقطة التماس إذا عُلِم ميل المماس.

مثال 6

1 **أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{x}$، التي يكون عندها ميل المماس $\frac{1}{2}$.**

الخطوة 1: أجد الإحداثي x لنقطة التماس.

الاقتران المعطى	$f(x) = \sqrt{x}$
بإيجاد المشتقّة	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
بتعويض $f'(x) = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$
بالضرب التبادلي	$2\sqrt{x} = 2$
بقسمة طرفي المعادلة على 2	$\sqrt{x} = 1$
بتربيع طرفي المعادلة	$x = 1$

الخطوة 2: أجد الإحداثي y لنقطة التماس.

أجد $f(1)$:

الاقتران المعطى	$f(x) = \sqrt{x}$
بتعويض $x = 1$	$f(1) = \sqrt{1}$
بالتبسيط	$= 1$

إذن، نقطة التماس هي: $(1, 1)$.

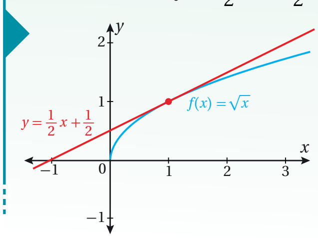
أتذكَّر

$(\sqrt{x})^2 = \sqrt{x} \times \sqrt{x} = x$،

حيث: $x > 0$.

الدعم البياني

يبيّن التمثيل البياني الآتي لمنحنى الاقتران $f(x)$ أن مماس الاقتران $f(x)$ عند النقطة $(1, 1)$ هو المستقيم $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.



2 أجد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = -x^3 + 6x^2$، التي يكون عندها المماس أفقيًّا.

الخطوة 1: أجد الإحداثي x لنقطة (نقاط) التماس.

الاقتران المعطى	$f(x) = -x^3 + 6x^2$
بإيجاد المشتقّة	$f'(x) = -3x^2 + 12x$
بتعويض $f'(x) = 0$	$-3x^2 + 12x = 0$
بإخراج $-3x$ عاملًا مشتركًا	$-3x(x-4) = 0$
خاصّية الضرب الصفري	$-3x = 0 \quad \text{or} \quad x-4 = 0$
بحَلِّ كل معادلة لـ x	$x = 0 \quad \text{or} \quad x = 4$

الخطوة 2: أجد الإحداثي y لنقطتي التماس.

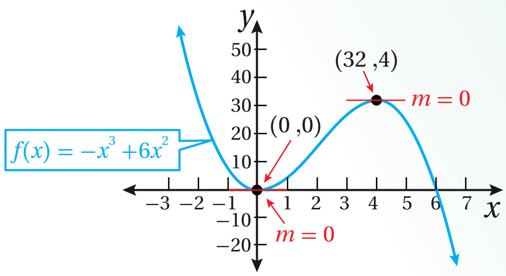
أجد $f(0)$، و $f(4)$:

الاقتران المعطى	$f(x) = -x^3 + 6x^2$
بتعويض $x = 0$	$f(0) = -(0)^3 + 6(0)^2 = 0$
بتعويض $x = 4$	$f(4) = -(4)^3 + 6(4)^2 = 32$

إذن، إحداثيا كلّ من نقطتي التماس اللتين يكون عندهما المماس أفقيًّا هما: $(0, 0)$، و $(4, 32)$.

الدعم البياني

يُبيِّن التمثيل البياني المجاور لمنحنى الاقتران $f(x)$ وجود مماسين أفقيين عندما $x = 0$، و $x = 4$.



أتذكَّر

ميل المماس الأفقي يساوي صفرًا، إذن: $m = f'(x) = 0$

أتحقَّق من فهمي

a) أجـد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = 1-\sqrt{x}$، التي يكون عندها ميل المماس $-\frac{1}{4}$

b) أجـد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$، التي يكون عندها المماس أفقيًّا.

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد مشتقّة كلٍّ من الاقترانات الآتية باستعمال التعريف العامّ للمشتقّة:

1) $f(x) = 4x + 1$

2) $y = 1 - x$

3) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$

4) $y = \frac{2x+4}{6}$

أجد مشتقّة كلٍّ من الاقترانات الآتية عند قيمة x المعطاة إزاء كلٍّ منها باستعمال التعريف العام للمشتقّة:

5) $f(x) = 4x^2, \quad x = 1$

6) $f(x) = 1 - x^2, \quad x = -2$

7) $f(x) = x^2 + x, \quad x = 2$

8) $f(x) = x^2 - 2x + 3, \quad x = -1$

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي:

9) $y = 10x - \frac{6}{\sqrt{x}}$

10) $y = x^8 - x^{-8}$

11) $y = 9x^{-2} + 3\sqrt{x}$

12) $y = \frac{1+\sqrt{x}}{x}$

13) $y = \frac{6}{x^3} + \frac{2}{x^2} - 3$

14) $y = 20x^5 + 3\sqrt[3]{x} + 17$

إذا كان الاقتران $y = x^2 - x$ ؛ فأستعمل المشتقّة لإيجاد كلّ ممّا يأتي:

15) معادلة المماس عندما $x = 4$.

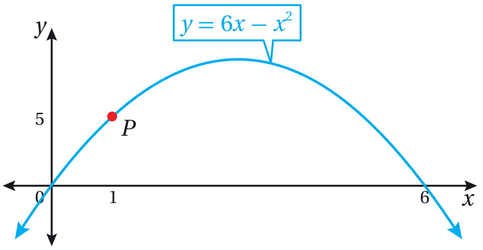
16) معادلة العمودي على المماس عندما $x = 4$.

17 أجـد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتـران: $f(x) = x^2 - x - 12$، التي يكون عندها ميل المماس 3، ثم أكتب معادلة هذا المماس.

18 أجـد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتـران: $f(x) = x^3 - 4x^2 - 4$، التي يكون عندها المماس أفقيًّا.

19 أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = 5x^2 - 49x + 12$، التي يكون عندها ميل المماس 1

يُبيّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $y = 6x - x^2$:



20 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة P.

21 أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة P.

مهارات التفكير العليا

تبرير: إذا كان: $f(x) = 6 - x^2$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

22 معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند كلٍّ من النقطة $(-1, 5)$ والنقطة $(1, 5)$، أبرّر إجابتي.

23 نقطة تقاطع المماسين من السؤال السابق، أبرّر إجابتي.

24 تحـدّ: إذا كان $f(x) = \frac{100}{x}$، وكانت P نقطة تقع على منحنــى $f(x)$ إحداثياها $(a, \frac{100}{a})$، حيث $a \neq 0$؛ فأجد مساحة المثلّث المكوّن من مماس منحنى $f(x)$ عند النقطة P والمحورين الإحداثيّين.

الدرس 3

القِيَم العظمى والصغرى

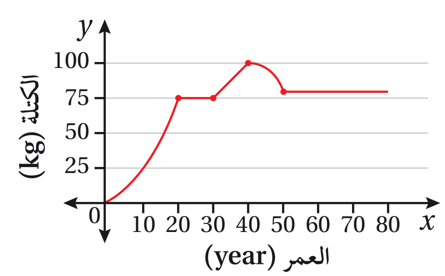
Maxima and Minima

فكرة الدرس

- تحديد النقاط الحرجة، وفترات التزايد والتناقص لاقترانات كثيرات الحدود.
- تصنيف النقاط الحرجة لاقترانات كثيرات الحدود باستعمال المشتقّة.

المصطلحات النقطة الحرجة، القيمة الحرجة، التزايـد، التناقص، نقطة عظمى محلية، نقطة صغرى محلية، القيم القصوى المحلية.

مسألة اليوم يُمثِّل المنحنى في الشكل المجاور التغيُّرات في كتلة جسم عمران:



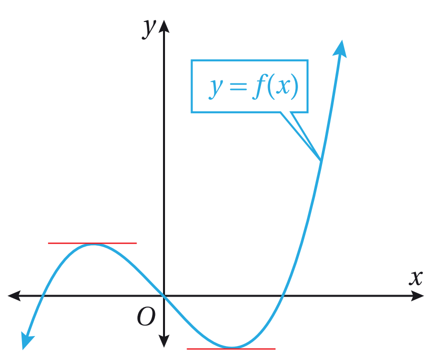
1) في أيِّ الفترات الزمنية زادت كتلة جسمه؟

2) في أيِّ الفترات الزمنية لم تتغيَّر كتلة جسمه؟

3) في أيِّ الفترات الزمنية نقصت كتلة جسمه؟

النقاط الحرجة للاقتران

توجد على منحنى الاقتران $f(x)$ المُبيَّن جانبًا نقطة واحدة على الأقل يُمكِن رسم مماس أفقي عندها، في ما يُعـرَف **بالنقطة الحرجة** (critical point)، وهـذا يعني أنَّ مشـتقّة الاقتران عند هـذه النقطة تساوي صفرًا، ويُسمّى الإحداثي x للنقطة الحرجة **قيمة حرجة** (critical value).



مثال 1

أجد النقاط الحرجة للاقتران: $f(x) = x^2 - 6x + 9$.

مشتقّة الاقتران $\quad f'(x) = 2x - 6$

بمساواة المشتقّة بالصفر $\quad 2x - 6 = 0$

بجمع 6 إلى طرفي المعادلة $\quad 2x = 6$

بقسمة طرفي المعادلة على 2 $\quad x = 3$

إذن، توجد قيمة حرجة للاقتران f عندما $x = 3$.

أمّا النقطة الحرجة على منحنى الاقتران f فهي: $(3, f(3)) = (3, 0)$.

أتحقّق من فهمي

أجد النقاط الحرجة لكل اقتران ممّا يأتي:

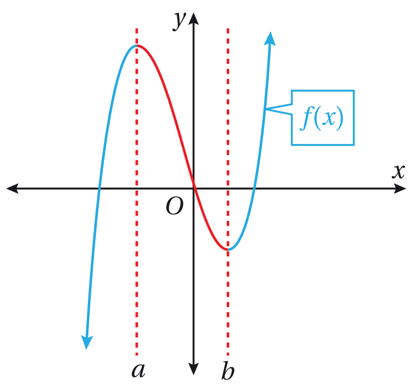
a) $f(x) = 6x^2 - 12x + 12$

b) $h(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 4x + 3$

أتذكّر

إذا كان $a \times b = 0$، فإنَّ $a = 0$، أو $b = 0$، أو كُلًّا منهما يساوي صفرًا.

تزايد اقترانات كثيرات الحدود وتناقصها



يُمثّل الشكل المجاور منحنى اقتران كثير الحدود $f(x)$. أُلاحظ أنّ قِيَم y تزداد في الفترة $(-\infty, a)$، والفترة (b, ∞)، حيث يرتفع منحنى الاقتران من اليسار إلى اليمين في هاتين الفترتين؛ لذا، يكون الاقتران $f(x)$ **متزايدًا** (increasing) في هاتين الفترتين. أُلاحظ أيضًا أنّ قِيَمَ y تقل في الفترة (a, b)، حيث ينخفض منحنى الاقتران من اليسار إلى اليمين؛ لذا، يكون الاقتران $f(x)$ **متناقصًا** (decreasing) في هذه الفترة.

أتعلّم

كُتبت فترة التناقص على صورة فترة مفتوحة، لأنّ التناقص يبدأ من يمين النقطة a وينتهي عند يسار النقطة b، وكذلك الأمر بالنسبة إلى فترات التزايد.

مفهوم أساسي — تزايد الاقتران وتناقصه

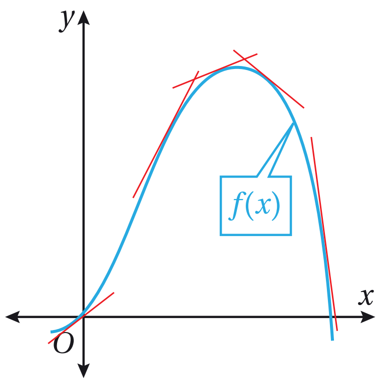
- يكون الاقتران f متناقصًا في الفترة المفتوحة I إذا كان $f(x_1) > f(x_2)$ لكلّ $x_1 < x_2$ في الفترة I.
- يكون الاقتران f متزايدًا في الفترة المفتوحة I إذا كان $f(x_1) < f(x_2)$ لكلّ $x_1 < x_2$ في الفترة I.

تعلّمتُ سابقًا أنّ مشتقّة الاقتران عند نقطة تساوي ميل المماس عند تلك النقطة. ولكن، كيف يُمكن استعمال المشتقّة في دراسة تزايد الاقتران وتناقصه على مجاله؟

يُبيّن الشكل المجاور بعض مماسات منحنى الاقتران $f(x)$. أُلاحظ أنّ:

- المماسات ذات الميل الموجب مرتبطة بالجزء المتزايد من منحنى الاقتران.
- المماســات ذات الميل السالب مرتبطة بالجزء المتناقص من منحنى الاقتران.

وهذا يقود إلى الاســتفادة من إشــارة المشتقّة في تحديد فترات تزايد الاقتران وتناقصه.



أتذكَّر

ميل المماس لمنحنى f عند نقطة هو f' عند هذه النقطة.

مفهوم أساسي — **اختبار تزايد الاقترانات وتناقصها**

- إذا كان $f'(x) > 0$ لقِيَم x جميعها في الفترة المفتوحة I؛ فإنّ الاقتران f يكون متزايدًا على الفترة I.
- إذا كان $f'(x) < 0$ لقِيَم x جميعها في الفترة المفتوحة I؛ فإنّ الاقتران f يكون متناقصًا على الفترة I.

أتعلّم

تقتصر أمثلة هذا الدرس وتدريباته على اقترانات كثيرات الحدود فقط، والتي مجالها مجموعة الأعداد الحقيقية R.

مثال 2

أجد فترات التزايد والتناقص لكلّ اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = x^2 + 2x - 3$

الخطوة 1: أجد مشتقّة الاقتران، ثم أجد أصفار المشتقّة.

$f'(x) = 2x + 2$ مشتقّة الاقتران

$2x + 2 = 0$ بمساواة المشتقّة بالصفر

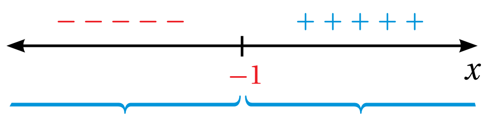
$2x = -2$ بطرح 2 من طرفي المعادلة

$x = -1$ بقسمة طرفي المعادلة على 2

إذن: صفر المشتقّة $x = -1$

الخطوة 2 : أبحثُ في إشارة المشتقّة.

أختار قيمة أقلّ من صفر المشتقّة (ولتكن -2) وأخرى أكبر منه (ولتكن 0)، وأُحدّد إشارة المشتقّة عند كلّ منهما.



الفترة	$x < -1$	$x > -1$
قِيَم الاختبار (x)	$x = -2$	$x = 0$
إشارة $f'(x)$	$f'(-2) < 0$	$f'(0) > 0$
سلوك الاقتران	متناقص	متزايد

إذن: $f(x)$ متناقص في الفترة $(-\infty, -1)$، ومتزايد في الفترة $(-1, \infty)$.

2 $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 36x$

الخطوة 1 : أجد مشتقّة الاقتران، ثم أجد أصفار المشتقّة.

مشتقّة الاقتران: $f'(x) = -6x^2 + 6x + 36$

بمساواة المشتقّة بالصفر: $-6x^2 + 6x + 36 = 0$

بإخراج -6 عاملًا مشتركًا: $-6(x^2 - x - 6) = 0$

بقسمة طرفي المعادلة على -6: $x^2 - x - 6 = 0$

بالتحليل: $(x + 2)(x - 3) = 0$

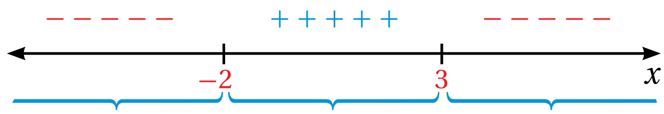
خاصّية الضرب الصفري: $(x + 2) = 0 \quad or \quad (x - 3) = 0$

بحلّ المعادلتين الناتجتين: $x = -2 \qquad x = 3$

إذن: صفرا المشتقّة هما: $x = -2, x = 3$

الخطوة 2: أبحثُ في إشارة المشتقّة.

أختار بعض القِيَم الأصغر من أصفار المشتقّة والأكبر منها، ثم أُحدّد إشارة المشتقّة عند كلّ منها.



الفترة	$x < -2$	$-2 < x < 3$	$x > 3$
قِيَم الاختبار (x)	$x = -3$	$x = 0$	$x = 4$
إشارة $f'(x)$	$f'(-3) < 0$	$f'(0) > 0$	$f'(4) < 0$
سلوك الاقتران	متناقص	متزايد	متناقص

إذن: $f(x)$ متناقص في الفترة $(-\infty, -2)$ والفترة $(3, \infty)$، ومتزايد في الفترة $(-2, 3)$.

أتحقّق من فهمي

أجد فترات التزايد والتناقص لكلّ اقتران ممّا يأتي:

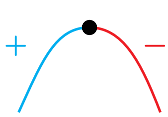
a) $f(x) = 6x^2 - 6x + 12$

b) $h(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 3$

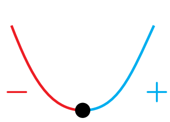
تصنيف النقاط الحرجة لاقترانات كثيرات الحدود باستعمال المشتقّة

يُمكن استعمال المشتقّة؛ لتصنيف النقاط الحرجة لاقترانات كثيرات الحدود كما يأتي:

- **نقطة عظمى محلّية** (local maximum point): النقطة الحرجة التي يكون منحنى الاقتران عن يسارها متزايدًا وعن يمينها متناقصًا، ما يعني أنّ إشارة المشتقّة عند الحركة من يسار النقطة إلى يمينها تتغيّر من الموجب إلى السالب.



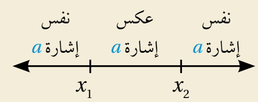
- **نقطة صغرى محلّية** (local minimum point): النقطة الحرجة التي يكون منحنى الاقتران عن يسارها متناقصًا وعن يمينها متزايدًا، ما يعني أنّ إشارة المشتقّة عند الحركة من يسار النقطة إلى يمينها تتغيّر من السالب إلى الموجب.



يُطلَق على القِيَم الصغرى المحلية والقِيَم العظمى المحلية للاقتران اسم **القِيَم القصوى المحلية** (local extreme values) للاقتران.

أتعلّم

إذا كان للاقتران التربيعي $f(x) = ax^2 + bx + c$ صفران حقيقيان مختلفان هما x_1 و x_2؛ فإنّه يُمكن تحديد الإشارة على جانبَي الصفرين وبينهما بسهولة كالآتي:



أتعلّم

- القيمة العظمى المحلّية هي الإحداثي y للنقطة العظمى المحلّية، وتُسمّى كذلك؛ لأنّها أكبر من القِيَم المجاورة لها.
- القيمة الصغرى المحلّية هي الإحداثي y للنقطة الصغرى المحلّية، وتُسمّى كذلك؛ لأنّها أصغر من القِيَم المجاورة لها.

مثال 3

أجد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران: $f(x) = \frac{4}{3}x^3 + 5x^2 - 6x - 2$.

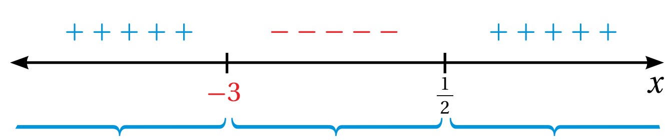
الخطوة 1: أجد القيم الحرجة للاقتران f.

مشتقّة الاقتران	$f'(x) = 4x^2 + 10x - 6$
بمساواة المشتقّة بالصفر	$4x^2 + 10x - 6 = 0$
بإخراج 2 عاملًا مشتركًا	$2(2x^2 + 5x - 3) = 0$
بقسمة طرفي المعادلة على 2	$2x^2 + 5x - 3 = 0$
بالتحليل	$(2x - 1)(x + 3) = 0$
خاصّية الضرب الصفري	$(2x-1) = 0 \quad \text{or} \quad (x + 3) = 0$
بحلّ المعادلتين الناتجتين	$x = \frac{1}{2} \qquad x = -3$

إذن، القِيَم الحرجة للاقتران f هي: $x = -3$, $x = \frac{1}{2}$

الخطوة 2: أبحث في إشارة المشتقة.

أختار بعض القِيَم التي هي أصغر من قِيَم x الحرجة وأكبر منها، ثم أُحدِّد إشارة المشتقة عند كلٍّ منها:



الفترة	$x < -3$	$-3 < x < \frac{1}{2}$	$x > \frac{1}{2}$
قِيَم الاختبار (x)	$x = -4$	$x = 0$	$x = 1$
إشارة $f'(x)$	$f'(-4) > 0$	$f'(0) < 0$	$f'(1) > 0$
سلوك الاقتران	متزايد	متناقص	متزايد

الخطوة 3: أجد القِيَم القصوى المحلية.

- توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = -3$ وهي: $f(-3) = 25$.
- توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = \frac{1}{2}$ وهي: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{43}{12}$.

أتحقّق من فهمي

أجد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$.

أتذكَّر

القِيَم الحرجة هي قِيَم مُرشَّحة ليكون عندها نقاط قصوى محلية، ويَلزم التحقُّق من أنَّ f يُغيِّر سلوكه حول هذه القِيَم (من التزايد إلى التناقص، أو العكس).

أتعلّم

النقطة الصغرى المحلّية ليست أقل نقطة على المنحنى، وإنّما هي فقط أقل من النقاط التي حولها، وكذلك الأمر بالنسبة إلى النقطة العظمى المحلّية؛ فهي ليست أعلى نقطة على المنحنى، إنّما هي فقط أعلى من النقاط التي حولها.

يُمكِن نمذجة كثير من المواقف الحياتية والعلمية باقترانات كثيرات الحدود، وعندئذ يستفاد من تحديد تزايد تلك الاقترانات وتناقصها وقيمها العظمى والصغرى في تحليل تلك المواقف وتفسيرها.

مثال 4 : من الحياة

درجات حرارة: يُمثِّل الاقتران الآتي درجة الحرارة لجسم مريض بعد t يومًا من دخوله المستشفى:

$$T(t) = -0.1t^2 + 1.2t + 38, \quad t \geq 0$$

حيث T درجة الحرارة بالسيلسيوس (°C). أُحدِّد أعلى درجة حرارة للمريض، واليوم الذي سُجِّلت فيه، علمًا بأنَّه تلقّى العلاج في المستشفى مدَّة 12 يومًا.

الخطوة 1: أجد القيم الحرجة للاقتران المعطى.

مشتقّة الاقتران $\quad T'(t) = -0.2t + 1.2$

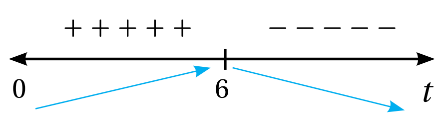
بمساواة المشتقّة بالصفر $\quad -0.2t + 1.2 = 0$

بطرح 1.2 من طرفي المعادلة $\quad -0.2t = -1.2$

بالقسمة على -0.2 $\quad t = 6$

إذن، القيمة الحرجة للاقتران T هي: $t = 6$.

الخطوة 2: أبحث في إشارة المشتقّة.



الخطوة 3: أجد القِيَم القصوى المحلية.

منحنى الاقتران T متزايد عن يسار $t = 6$، ومتناقص عن يمينها؛ ما يعني أنَّ للاقتران T قيمة عظمى محلية عندما $t = 6$، وهي:

بتعويض $t = 6$ $\quad T(6) = -0.1(6)^2 + 1.2(6) + 38 = 41.6$

إذن، أعلى درجة حرارة للمريض هي 41.6°C، وقد سُجِّلت في اليوم السادس من بدء علاجه.

معلومة

يختلف مدى درجة حرارة جسم الإنسان الطبيعية مع التقدُّم بالعُمُر على النحو الآتي:

- الرُّضَّع والأطفال: من 36.6°C إلى 37.2°C
- البالغون: من 36.1°C إلى 37.2°C
- كبار السن (أكثر من 65 عامًا): قد تنخفض إلى 36.2°C

معلومة

علم الحيوان (zoology) هو أحد فروع علم الأحياء، ويُعنى بدراسة الحيوانات علميًّا من نواحٍ عدة، منها: توزيعها الجغرافي، وتفاعلها مع النظم البيئية والبشر.

أتحقّق من فهمي

لاحظت عالمة حيوان أنَّ عدد الضفادع في بحيرة ما يُمكِن نمذجته بالاقتران: $P(t) = 120t - 0.4t^2 + 1000$، حيث P عدد الضفادع، و t الزمن بالأشهر منذ بدء ملاحظة الضفادع. أجد أكبر عدد يُمكِن أنْ تصل إليه الضفادع في البحيرة منذ بدء ملاحظتها.

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد النقاط الحرجة لكل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = x^2 - 6x + 10$

2) $f(x) = 1 - 12x + 2x^2$

3) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$

4) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$

أجد فترات التزايد والتناقص لكلّ اقتران ممّا يأتي:

5) $f(x) = 4x + 3$

6) $f(x) = 7 - 5x$

7) $f(x) = x^2 + 7$

8) $f(x) = x^2 - x$

9) $f(x) = x^2 - 5x + 2$

10) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

11) $f(x) = 3x^2(12 - 5x)$

12) $f(x) = (x-2)^2$

أجد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) لكلّ اقتران ممّا يأتي:

13 $y = x^3 + 6x^2 - 15x - 90$

14 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$

15 $f(x) = x^4 - x^2$

16 $y = \frac{2}{3}x^3 - 8x^2 + 30x$

17 $f(x) = 16x^3 + 24x^2 + 3$

18 $h(x) = -(x-2)^2 + 1$

19 **صناعة:** تُنتِج إحدى الشركات صناديق لتخزين البضائع على شكل متوازي مستطيلات. إذا أمكن نمذجة حجم كلٍّ من هذه الصناديق بالاقتران: $V(x) = 18x - \frac{2}{3}x^3$، فأجد قيمة x التي تجعل حجم الصندوق أكبر ما يُمكِن.

مهارات التفكير العليا

20 **تبرير:** إذا كان الاقتران $y = ax^2 + bx + c$، يمرّ بالنقطتين $(0, -48)$، و $(6, 0)$، وله قيمة عظمى محلية عندما $x = 7$؛ فأجد قِيَم الثوابت a و b و c، وأبرر إجابتي.

تحدّ: إذا كان الاقتران $y = x^3 + ax^2 + b$، حيث a و b ثابتان؛ فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

21 أُثبتُ أنّ لمنحنى الاقتران نقطة حرجة عند تقاطعه مع المحور y.

22 أُثبتُ أنّ للاقتران نقطة صغرى محلّية إذا كانت $a > 0$.

23 **تحدّ:** إذا كان للاقتران: $f(x) = ax^2 - 4x + c$، حيث a و c عددان حقيقيان، نقطة حرجة هي $(2, -7)$، فما قيمة كلٍّ من a و c؟

الدرس 4

المشتقّة الثانية وتطبيقاتها

The Second Derivative and its Applications

فكرة الدرس

- إيجاد المشتقّة الثانية لاقتران.
- تصنيف النقاط الحرجة باستعمال اختبار المشتقّة الثانية.
- إيجاد السرعة المتجهة والتسارع لجسم يتحرَّك في مسار مستقيم.

المصطلحات المشتقّة الثانية، اختبار المشتقّة الثانية، الموقع، السرعة المتجهة، التسارع.

مسألة اليوم يُمكِن نمذجة موقع درّاجة نارية تتحرَّك في مسار مستقيم باستعمال الاقتران: $s(t) = \frac{1}{2}t^2 + 15t,\ t \geq 0$، حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالأمتار. أجد تسارع الدراجة عندما $t = 3$.

المشتقّة الثانية

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ اقتران المشتقّة هو اقتران جديد، وهذا يعني أنَّه يُمكِنني اشتقاقه.

يُطلَق على الاقتران الناتج من اشتقاق الاقتران مَرَّتين اسم **المشتقّة الثانية** (the second derivative) للاقتران، ويُرمَز إليه بالرمز $f''(x)$. فمثلًا، إذا كان: $f(x) = x^4$، فإنَّ مشتقّة الاقتران $f(x)$ هي: $f'(x) = 4x^3$، والمشتقّة الثانية للاقتران $f(x)$ هي: $f''(x) = 12x^2$.

رموز رياضية

تُستعمَل الرموز: $\frac{d^2y}{dx^2}, y'', \frac{d^2}{dx^2}(f(x))$ للتعبير عن المشتقّة الثانية.

مثال 1

أجد المشتقّة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = x^5 - \frac{1}{2}x^4$

$f(x) = x^5 - \frac{1}{2}x^4$ الاقتران المعطى

$f'(x) = 5x^4 - 2x^3$ المشتقّة الأولى للاقتران $f(x)$

$f''(x) = 20x^3 - 6x^2$ المشتقّة الثانية للاقتران $f(x)$

2 $f(x) = \frac{5}{x^2} + 7$

$f(x) = \frac{5}{x^2} + 7$	الاقتران المعطى
$f(x) = 5x^{-2} + 7$	بكتابة الاقتران على الصورة الأُسّية
$f'(x) = -10x^{-3}$	المشتقّة الأولى للاقتران $f(x)$
$f''(x) = 30x^{-4}$	المشتقّة الثانية للاقتران $f(x)$
$= \frac{30}{x^4}$	تعريف الأسّ السالب

أتحقّق من فهمي

أجد المشتقّة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = x^4 - 3x^2$

b) $f(x) = \frac{2}{x^3}$

تصنيف القِيَم الحرجة باستعمال اختبار المشتقّة الثانية

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ النقطة التي يكون عندها ميل مماس الاقتران صفرًا هي نقطة حرجة، وهذا يعني أنَّ مشتقّة الاقتران عند هذه النقطة تساوي صفرًا؛ لذا يُمكِن رسم مماس أفقي عندها. تعلَّمْتُ أيضًا أنَّه يُمكِن تصنيف النقاط الحرجة بدراسة إشارة المشتقّة الأولى للاقتران، والآن سأتعلَّم كيف أستعمل **اختبار المشتقّة الثانية** (second derivative test) لتحديد ماهية القيمة الحرجة؛ هل هي عظمى محلية أم صغرى محلية.

أتذكَّر

يشير مصطلح (النقطة العظمى المحلية) إلى النقطة (x, y)، ويشير مصطلح (القيمة العظمى المحلية) إلى الإحداثي y للنقطة العظمى المحلية. وكذلك الحال بالنسبة إلى مصطلح (النقطة الصغرى المحلية)، ومصطلح (القيمة الصغرى المحلية).

نظرية

اختبار المشتقّة الثانية

بافتراض وجود f' و f'' لأيِّ نقطة في فترة مفتوحة تحوي c، وأنَّ: $f'(c) = 0$، فإنَّه يُمكِن استنتاج ما يأتي:

- إذا كان: $f''(c) < 0$، فإنَّ $f(c)$ هي قيمة عظمى محلية للاقتران f.
- إذا كان: $f''(c) > 0$، فإنَّ $f(c)$ هي قيمة صغرى محلية للاقتران f.
- إذا كان: $f''(c) = 0$، فإنَّ اختبار المشتقّة الثانية يفشل. وفي هذه الحالة، يجب استعمال المشتقّة الأولى لتصنيف القِيَم القصوى المحلية.

أتذكَّر

يُطلَق على القِيَم الصغرى المحلية والقِيَم العظمى المحلية اسم القِيَم القصوى المحلية.

مثال 2

إذا كان: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$، فأستعمل اختبار المشتقّة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية للاقتران f.

الخطوة 1: أجد المشتقّة الأولى والقِيَم الحرجة للاقتران.

الاقتران المعطى	$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$
المشتقّة الأولى للاقتران $f(x)$	$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$
بمساواة المشتقّة الأولى للاقتران $f(x)$ بالصفر	$6x^2 + 6x - 12 = 0$
بقسمة طرفي المعادلة على 6	$x^2 + x - 2 = 0$
بتحليل العبارة التربيعية	$(x+2)(x-1) = 0$
خاصّية الضرب الصفري	$x + 2 = 0$ or $x - 1 = 0$
بحَلِّ المعادلتين الناتجتين	$x = -2$ $x = 1$

إذن، القِيَم الحرجة للاقتران f هي:

$$x = -2, x = 1$$

الخطوة 2: أجد المشتقّة الثانية للاقتران.

المشتقّة الأولى للاقتران $f(x)$	$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$
المشتقّة الثانية للاقتران $f(x)$	$f''(x) = 12x + 6$

الخطوة 3: أُعوِّض القِيَم الحرجة في المشتقّة الثانية للاقتران $f(x)$؛ لتصنيفها.

بتعويض $x = -2$	$f''(-2) = 12(-2) + 6 = -18 < 0$
بتعويض $x = 1$	$f''(1) = 12(1) + 6 = 18 > 0$

أُلاحِظ أنَّ:

- $f''(-2) < 0$. إذن، توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = -2$، وهي: $f(-2) = 20$.
- $f''(1) > 0$. إذن، توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$، وهي: $f(1) = -7$.

أتحقّق من فهمي

إذا كان: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 5$، فأستعمل اختبار المشتقّة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية للاقتران f.

السرعة والتسارع عند الحركة في مسار مستقيم

عند دراسة جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، أفترض أنَّ الجسم يتحرَّك على خط أعداد انطلاقًا من موقع ابتدائي، وأنَّ اتجاه حركته يكون موجبًا أو سالبًا، وأنَّ **موقع** (position) الجسم بالنسبة إلى نقطة الأصل يُمثِّل اقترانًا بالنسبة إلى الزمن t، ويُرمَز إليه بالرمز $s(t)$.

تمثّل المشتقّة الأولى للاقتران $s(t)$ معدل تغيُّر موقع الجسم بالنسبة إلى الزمن، أو **السرعة المتجهة** (velocity) للجسم، ويُرمَز إليها بالرمز $v(t)$. وقد سُمِّيت بهذا الاسم لأنَّها تحدّد سرعة الجسم واتجاه حركته، فإذا كانت قيمة $v(t) > 0$ فإنَّ الجسم يتحرَّك في الاتجاه الموجب، وإذا كانت قيمة $v(t) < 0$ فإنَّ الجسم يتحرَّك في الاتجاه السالب، وإذا كانت $v(t) = 0$ فإنَّ الجسم يكون في حالة سكون لحظي.

أمّا القيمة المُطلَقة للسرعة المتجهة فتُسمّى **السرعة القياسية** (speed)، وهي تحدّد مقدارًا ولا تحدّد اتجاه الحركة.

تمثّل المشتقّة الثانية للاقتران $s(t)$ معدل تغيُّر سرعة الجسم بالنسبة إلى الزمن، أو **التسارع** (acceleration)، ويُرمَز إليه بالرمز $a(t)$.

أتعلَّم

المسافة كمية قياسية (ليست متجهة)، والموقع كمية متجهة؛ لذا يأخذ موقع الجسم $s(t)$ قِيَمًا موجبةً، أو قِيَمًا سالبةً، أو صفرًا.

أتعلَّم

تُسمّى النقطة 0 على خطِّ الأعداد نقطة الأصل.

مثال 3

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

1 ما سرعة الجسم عندما $t = 2$؟

أجد المشتقّة الأولى لاقتران الموقع، ثمّ أُعوِّض $t = 2$ في المشتقّة:

اقتران السرعة	$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 8t + 5$
بتعويض $t = 2$	$v(2) = 3(2)^2 - 8(2) + 5$
بالتبسيط	$= 1$

إذن، سرعة الجسم عندما $t = 2$ هي: 1 m/s

2 في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 2$؟

بما أنَّ إشارة الســرعة موجبة عندما $t = 2$، فإنَّ الجسم يتحرَّك في الاتجاه الموجب عند تلك اللحظة.

3 ما تسارع الجسم عندما $t = 2$؟

أجد المشتقّة الثانية لاقتران الموقع، ثمّ أُعوِّض $t = 2$ في المشتقّة:

اقتران التسارع	$a(t) = v'(t) = s''(t) = 6t - 8$
بتعويض $t = 2$	$a(2) = 6(2) - 8$
بالتبسيط	$= 4$

إذن، تسارع الجسم عندما $t = 2$ هو: 4 m/s^2

4 أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

يكون الجسم في حالة سكون لحظي إذا كانت سرعته 0؛ أيْ عندما $v(t) = 0$:

بمساواة اقتران السرعة بالصفر	$3t^2 - 8t + 5 = 0$
بتحليل العبارة التربيعية	$(3t - 5)(t - 1) = 0$

إرشاد

نشـير إلـى أنَّ كلمـة (ســرعة) تعني الســرعة المتجهة أينما وردت في هذا الكتاب.

أتعلّم

يمثّل التســارع المشــتقّة الثانيــة لاقتــران الموقع، والمشــتقّة الأولى لاقتران السرعة.

خاصّية الضرب الصفري	$3t-5=0 \quad \text{or} \quad t-1=0$
بحَلِّ المعادلتين الناتجتين	$t=\frac{5}{3} \qquad t=1$

إذن، يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما $t=1$، و $t=\frac{5}{3}$.

أتحقّق من فهمي

يُمثِّل الاقتران: $s(t)=3t^2-t^3,\ t\geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

a) ما سرعة الجسم عندما $t=3$؟

b) في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t=3$؟

c) ما تسارع الجسم عندما $t=3$؟

d) أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

توجد تطبيقات حياتية عديدة للسرعة والتسارع، ويُمكِن استعمال هذه التطبيقات لتحليل حركة الأجسام.

مثال 4 : من الحياة

أسد جبال: يُمكِن نمذجة موقع أسد جبال يطارد فريسته على أرض مستوية مُتحرِّكًا في مسار مستقيم باستعمال الاقتران: $s(t)=t^3-15t^2+63t,\ t\geq 0$، حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالأمتار:

معلومة

أسد الجبال حيوان من فصيلة السنوريات، وهو قريب جينيًّا من القطط الأهلية مقارنةً بالأسود.

1 ما سرعة أسد الجبال بعد 4 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

أجد المشتقّة الأولى لاقتران الموقع، ثم أُعوِّض $t=4$ في المشتقّة:

اقتران السرعة	$v(t)=s'(t)=3t^2-30t+63$
بتعويض $t=4$	$v(4)=3(4)^2-30(4)+63$
بالتبسيط	$=-9$

إذن، سرعة أسد الجبال بعد 4 ثوانٍ من بَدْء حركته هي: -9 m/s

2 **ما تسارع أسد الجبال بعد 4 ثوانٍ من بَدْء حركته؟**

أجد المشتقّة الثانية لاقتران الموقع، ثم أُعوِّض $t = 4$ في المشتقّة:

اقتران التسارع	$a(t) = v'(t) = s''(t) = 6t - 30$
بتعويض $t = 4$	$a(4) = 6(4) - 30$
بالتبسيط	$= -6$

إذن، تسارع أسد الجبال بعد 4 ثوانٍ من بَدْء حركته هو: -6 m/s^2

3 **أجد قِيَم t التي يكون عندها أسد الجبال في حالة سكون لحظي.**

يكون أسد الجبال في حالة سكون لحظي إذا كانت سرعته 0؛ أيْ عندما $v(t) = 0$:

بمساواة اقتران السرعة بالصفر	$3t^2 - 30t + 63 = 0$
بقسمة طرفي المعادلة على 3	$t^2 - 10t + 21 = 0$
بتحليل العبارة التربيعية	$(t-3)(t-7) = 0$
خاصّية الضرب الصفري	$t - 3 = 0 \quad \text{or} \quad t - 7 = 0$
بحَلِّ المعادلتين الناتجتين	$t = 3 \qquad\qquad t = 7$

إذن، يكون أسد الجبال في حالة سكون لحظي عندما $t = 3$، و $t = 7$.

أتحقّق من فهمي

فهد: يُمكِن نمذجة موقع فهد يطارد فريسته على أرض مستوية مُتحرِّكًا في خط مستقيم باستعمال الاقتران: $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t,\ t \geq 0$، حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالأمتار:

a) ما سرعة الفهد بعد 3 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

b) ما تسارع الفهد بعد 3 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

c) أجد قِيَم t التي يكون عندها الفهد في حالة سكون لحظي.

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد المشتقّة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x$

2) $f(x) = 2x^{-3}$

3) $f(x) = x^3 - \frac{5}{x}$

4) $f(x) = \sqrt{x}$

5) $f(x) = 2 - 4x + x^2 - x^3$

أجد المشتقّة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

6) $f(x) = 8x^3 - 3x + \frac{4}{x}\ , x = -2$

7) $f(x) = \sqrt{x^3}\ , x = 4$

أستعمل اختبار المشتقّة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي:

8) $y = x^4 - 2x^2$

9) $y = x^2\,(x-4)$

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^5 - 20t^2\ , t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك على خط مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

10) ما سرعة الجسم عندما $t = 3$؟

11) في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 3$؟

12) ما تسارع الجسم عندما $t = 3$؟

13) أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

لوح تزلُّج: **يتحرَّك رامي في مسار مستقيم على لوح تزلُّج، بحيث يُمكِن نمذجة موقعه باستعمال الاقتران: $s(t) = t^2 - 8t + 12,\ t \geq 0$، حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالأمتار:**

14 ما سرعة رامي بعد 6 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

15 ما تسارع رامي بعد 6 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

16 أجد قِيَم t التي يكون عندها رامي في حالة سكون لحظي.

مهارات التفكير العليا

17 **تبرير:** إذا كان $y = x^2 - \frac{1}{x},\ x \neq 0$، فأُثبت أن: $x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 6x$، أبرّر إجابتي.

18 **تبرير:** إذا كان: $f(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + 2x - 8}{x - 2},\ x \neq 2$، فأجد إحداثيي النقطة (أو إحداثيات النقاط) الواقعة على منحنى $f(x)$ التي تكون عندها $f''(x) = 0$، أبرّر إجابتي.

19 **تحدٍّ:** إذا مثَّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 12t - 9,\ t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني، فما سرعة الجسم عندما يكون تسارعه صفرًا؟

20 **تحدٍّ:** إذا مثَّل الاقتران: $s(t) = 2t^3 - 24t - 10,\ t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني، فما تسارع الجسم عندما تكون سرعته صفرًا؟

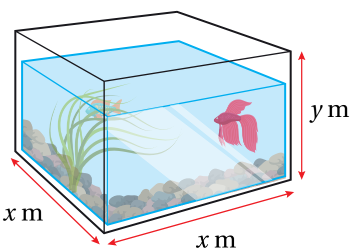
الدرس 5

تطبيقات القِيَم القصوى
Optimization Problems

فكرة الدرس حَلُّ مسائل حياتية باستعمال القِيَم القصوى.

المصطلحات اقتران التكلفة، التكلفة الحدِّية، اقتران الإيراد، الإيراد الحدِّي، اقتران الربح، الربح الحدِّي.

مسألة اليوم أرادت إسراء تصميم حوض أسماك زجاجي مفتوح من الأعلى، بحيث تكون سعته $0.2\ \text{m}^3$، وأبعاده كما في الشكل المجاور. أجد أبعاد الحوض التي تجعل كمِّية الزجاج المُستعمَلة لصنعه أقل ما يُمكِن.



تطبيقات القِيَم القصوى

يُعَدُّ تحديد القيمة الصغرى المحلية والقيمة العظمى المحلية أحد أكثر موضوعات التفاضل الفرعية استعمالًا في التطبيقات الحياتية والعلمية، مثل: تحديد أكبر مساحة مُمكِنة، وأكبر ربح مُمكِن، وأقل تكلفة مُمكِنة.

يُمكِن اتِّباع الخطوات الآتية لحَلِّ العديد من مسائل تطبيقات القِيَم القصوى:

مفهوم أساسي **خطوات حَلِّ مسائل القِيَم القصوى**

1) **أفهم المسألة:** أقرأ المسألة جيدًا، ثم أُحدِّد المعلومات اللازمة لحَلِّها.

2) **أرسم مُخطَّطًا:** أرسم مُخطَّطًا يُمثِّل المسألة، ثم أُدوِّن عليه المعلومات المُهِمَّة لحَلِّ المسألة، وأختار مُتغيِّرًا يُمثِّل الكمِّية التي أُريد أن أجد لها أكبر قيمة أو أقل قيمة، وأختار رموزًا للمُتغيِّرات الأُخرى في المسألة، ثم أستعمل المُتغيِّرات لكتابة اقتران قيمته القصوى هي القيمة المطلوبة.

3) **أجد القِيَم الحرجة للاقتران:** أجد القِيَم التي تكون عندها مشتقّة الاقتران صفرًا.

4) **أجد القيمة القصوى المطلوبة:** أجد القيمة الصغرى أو القيمة العظمى المطلوبة.

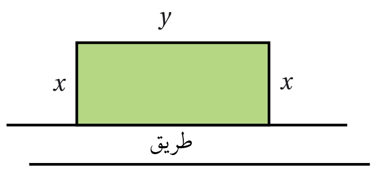
إيجاد أكبر مساحة مُمكِنة

من التطبيقات الحياتية المُهِمَّة على القِيَم القصوى: إيجاد أكبر مساحة يُمكِن إحاطتها بسياج طوله معلوم.

مثال 1 : من الحياة

اشترى مُزارِعٌ سياجًا طوله 800 m لتسييج حقل مستطيل الشكل من مزرعته، وكان هذا الحقل مُقابِلًا لطريق زراعي يوجد بمحاذاته سياج من قبلُ. أجد أكبر مساحة مُمكِنة للحقل يُمكِن للمُزارِع أنْ يحيطها بالسياج.

الخطوة 1: أرسم مُخطَّطًا.



أفترض أنَّ y هو طول الحقل، وأنَّ x هو عرضه كما في المُخطَّط المجاور.

الخطوة 2: أكتب الاقتران الذي أُريد إيجاد قيمته القصوى بدلالة مُتغيِّر واحد.

- أجد اقتران مساحة الحقل:

$A = x\,y$ مساحة المستطيل

- أكتب y بدلالة x باستعمال المحيط:

$P = 2x + y$ محيط الحقل

$800 = 2x + y$ بتعويض $P = 800$

$y = 800 - 2x$ بكتابة المعادلة بدلالة y

- أُعوِّض y في اقتران مساحة الحقل:

$A = x\,y$ اقتران مساحة الحقل

$A(x) = x\,(800 - 2x)$ بتعويض $y = 800 - 2x$

أُشاهِد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز الآتي:

أتعلَّم

بما أنَّ أحد أضلاع الحقل يُقابِل الطريق الزراعي الذي يوجد بمحاذاته سياج من قبل، فإنَّه يتعيَّن على المُزارِع أنْ يُسيِّج فقط ثلاثة أضلاع من الحقل.

بالتبسيط $= 800x - 2x^2$

إذن، الاقتران الذي يُمثِّل مساحة الحقل هو: $A(x) = 800x - 2x^2$.

الخطوة 3: أجد القِيَم الحرجة للاقتران، وأحدّد نوعها.

المشتقّة الأولى لاقتران مساحة الحقل $A'(x) = 800 - 4x$

بمساواة المشتقّة الأولى للاقتران بالصفر $800 - 4x = 0$

بحلّ المعادلة لـ x $x = 200$

إذن، توجد قيمة حرجة واحدة، هي: $x = 200$.

أستعمل اختبار المشتقّة الثانية لتحديد نوع القيمة الحرجة عندما $x = 200$:

المشتقّة الثانية لاقتران مساحة الحقل $A''(x) = -4$

بما أنَّ المشتقّة الثانية للاقتران سالبة لقِيَم x جميعها، فإنَّه توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 200$، وهذا يعني أنَّ مساحة الحقل تكون أكبر ما يُمكِن إذا كان عرضه 200 m

إذن، أكبر مساحة مُمكِنة للحقل يُمكِن للمُزارِع أنْ يحيطها بالسياج هي:

$$A(200) = 800(200) - 2(200)^2 = 80000 \text{ m}^2$$

أتحقّق من فهمي

يريد نجّار بناء سقف خشبي لحظيرة حيوانات على شكل مستطيل محيطه 54 m. أجد أكبر مساحة مُمكِنة لسطح الحظيرة.

إيجاد أقل كمّية مُمكِنة

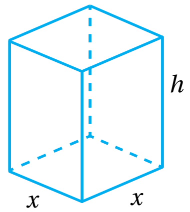
من التطبيقات الاقتصادية المهمة على القِيَم القصوى، إيجاد أقل كمّية مُمكِنة من المواد اللازمة لصنع الأشياء.

مثال 2

أراد مصنع إنتاج عُلَبٍ من الكرتون على شــكل متوازي مستطيلات مغلق، بحيث يكون حجم كلٍّ منهــا $1000\ \text{cm}^3$، وقاعدته مربعة الشــكل. أجد أبعاد العُلْبة الواحــدة التي تجعل كمِّية الكرتون المُستعمَلة لصنعها أقل ما يُمكِن.

الخطوة 1: أرسم مُخطَّطًا.

أفتــرض أنَّ x هو طول قاعدة العلبة، وأنَّ h هــو ارتفاعها كما في المُخطَّط المجاور.



الخطـوة 2: أكتب الاقتران الذي أُريد إيجاد قيمته القصوى بدلالة مُتغيِّر واحد.

- أجد اقتران المساحة الكلية لسطح العُلْبة:

$S = 4xh + 2x^2$ اقتران المساحة الكلية لسطح العُلْبة

- أكتب h بدلالة x باستعمال حجم متوازي المستطيلات المعطى:

$V = x^2 h$ حجم العُلْبة

$1000 = x^2 h$ بتعويض $V = 1000$

$h = \frac{1000}{x^2}$ بكتابة المعادلة بدلالة h

- أُعوِّض h في اقتران المساحة الكلية لسطح العُلْبة:

$S = 4xh + 2x^2$ اقتران المساحة الكلية لسطح العُلْبة

$S(x) = 4x\left(\frac{1000}{x^2}\right) + 2x^2$ بتعويض $h = \frac{1000}{x^2}$

$= \frac{4000}{x} + 2x^2$ بالتبسيط

إذن، الاقتران الذي يُمثِّل المساحة الكلية لسطح العُلْبة هو: $S(x) = \frac{4000}{x} + 2x^2$.

أتذكَّر

المســاحة الكلية لسطح متوازي المستطيلات هي المســاحة الجانبية التي أُضيــف إليها مســاحتا القاعدتيــن، علمًــا بأنَّ المســـاحة الجانبيـــة هــي محيــط القاعدة في الارتفاع.

أتذكَّر

حجم متوازي المستطيلات هو مساحة القاعدة مضروبةً في الارتفاع.

أُشاهِد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز الآتي:

الخطوة 3: أجد القِيَم الحرجة للاقتران، وأحدّد نوعها.

المشتقّة الأولى لاقتران مساحة السطح $S'(x) = -\frac{4000}{x^2} + 4x$

بمساواة المشتقّة الأولى بالصفر $-\frac{4000}{x^2} + 4x = 0$

بضرب طرفي المعادلة في x^2 $4x^3 = 4000$

بقسمة طرفي المعادلة على 4 $x^3 = 1000$

بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين $x = 10$

إذن، توجد قيمة حرجة واحدة، هي: $x = 10$.

أستعمل اختبار المشتقّة الثانية لتحديد نوع القيمة الحرجة عندما $x = 10$:

المشتقّة الثانية لاقتران مساحة السطح $S''(x) = \frac{8000}{x^3} + 4$

بتعويض $x = 10$ $S''(10) = \frac{8000}{(10)^3} + 4 = 12 > 0$

أُلاحِظ وجود قيمة صغرى محلية عندما $x = 10$، وهذا يعني أنَّ كمِّية الكرتون المُستعمَلة تكون أقل ما يُمكِن إذا كان طول القاعدة 10 cm

إذن، أبعاد العُلْبة الواحدة هي: $l = x = 10 \text{ cm}, w = x = 10 \text{ cm}, h = \frac{1000}{x^2} = 10 \text{ cm}$.

أتعلَّم

في هذه المسألة، تكون كمِّية الكرتون المُستعمَلة أقل ما يُمكِن إذا كانت العُلْبة على شكل مُكعَّب.

أتحقّق من فهمي

أرادت إحدى الشركات أنْ تصنع خزّانات معدنية على شكل متوازي مستطيلات مغلق، بحيث يكون حجم كلٍّ منها 2 m^3، وقاعدته مربعة الشكل.

أجد أبعاد الخزّان الواحد التي تجعل كمِّية المعدن المُستعمَلة لصنعه أقل ما يُمكِن.

إيجاد أكبر حجم مُمكِن

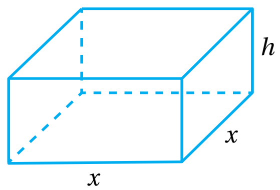
يُعَدُّ إيجاد أكبر حجم مُمكِن للخزّانات أحـد التطبيقات الحياتية المُهِمَّة على القِيَم القصوى؛ فهو يساعد على تحديد الأبعاد والتصاميم التي تنتج أكبر حجم ممكن باستعمال الكمية نفسها من مواد التصنيع.

مثال 3

لدى حدّاد صفيحةٌ معدنية مساحتها 36 m^2. أراد أنْ يصنع منها خزّان ماء على شكل متوازي مستطيلات مغلق، على أن تكون قاعدة الخزّان مربعة الشكل. أجد أبعاد الخزّان التي تجعل حجمه أكبر ما يُمكِن.

الخطوة 1: أرسم مُخطَّطًا.

أفترض أنَّ x هو طول قاعدة الخزّان، وأنَّ h هو ارتفاعه كما في المُخطَّط المجاور.



الخطوة 2: أكتب الاقتران الذي أُريد إيجاد قيمته القصوى بدلالة مُتغيِّر واحد.

- أجد اقتران حجم الخزّان:

صيغة حجم متوازي المستطيلات	$V = l \times w \times h$
بتعويض $l = x, w = x$	$= x \times x \times h$
بالتبسيط	$= x^2 h$

- أكتب h بدلالة x باستعمال المساحة الكلية لسطح الخزّان المعطاة في السؤال:

المساحة الكلية لسطح الخزّان	$S = 4xh + 2x^2$
بتعويض $S = 36$	$36 = 4xh + 2x^2$
بكتابة المعادلة بدلالة h	$h = \dfrac{36 - 2x^2}{4x}$
بالتبسيط	$= \dfrac{18 - x^2}{2x}$

- أُعوِّض h في اقتران حجم الخزّان:

اقتران حجم الخزّان $V = x^2 h$

بتعويض $h = \frac{18 - x^2}{2x}$ $V(x) = x^2\left(\frac{18 - x^2}{2x}\right)$

بالتبسيط $= 9x - \frac{1}{2}x^3$

إذن، الاقتران الذي يُمثِّل حجم الخزّان هو: $V(x) = 9x - \frac{1}{2}x^3$.

الخطوة 3: أجد القِيَم الحرجة للاقتران، وأحدّد نوعها.

بإيجاد مشتقّة اقتران الحجم $V'(x) = 9 - \frac{3}{2}x^2$

بمساواة المشتقّة بالصفر $9 - \frac{3}{2}x^2 = 0$

بحَلِّ المعادلة لـ x^2 $x^2 = 6$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين $x = \pm\sqrt{6}$

بما أنَّ الطول لا يُمكِن أنْ يكون سالبًا، فإنَّه توجد قيمة حرجة واحدة، هي: $x = \sqrt{6}$.

أستعمل اختبار المشتقّة الثانية لتحديد نوع القيمة الحرجة عندما $x = \sqrt{6}$:

بإيجاد المشتقّة الثانية لاقتران الحجم $V''(x) = -3x$

بتعويض $x = \sqrt{6}$ $V''(\sqrt{6}) = -3(\sqrt{6}) < 0$

ألاحِظ وجود قيمة عظمى محلية عندما $x = \sqrt{6}$، وهذا يعني أنَّ حجم الخزّان يكون أكبر ما يُمكِن إذا كان طول القاعدة $\sqrt{6}$ m.

إذن، أبعاد الخزّان هي:

$l = x = \sqrt{6}$ m, $w = x = \sqrt{6}$ m, $h = \frac{18 - x^2}{2x} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$ m.

أتحقّق من فهمي

لدى حدّاد صفيحةٌ معدنية مساحتها $54\ \text{m}^2$. أراد أنْ يصنع منها خزّان ماء على شكل متوازي مستطيلات، على أن يكون الخزّان مفتوحًا من الأعلى، وقاعدته مربعة الشكل. أجد أبعاد الخزّان التي تجعل حجمه أكبر ما يُمكِن.

تطبيقات اقتصادية

من التطبيقات الاقتصاديــة المُهِمَّة على القِيَم القصوى: إيجاد أكبر ربح لمُنتَج مُعيَّن، أو إيجاد أعلى إيراد من بيعه، أو إيجاد أقل تكلفة لصنعه.

يُطلَــق على الاقتــران الذي يُمثِّل تكلفــة إنتاج x قطعة من مُنتَج مُعيَّن اســم **اقتــران التكلفة** (cost function)، ويُرمَز إليه بالرمز $C(x)$. ويُطلَق على مُعدَّل تغيُّر C بالنســبة إلى x اســم **التكلفة الحدِّية** (marginal cost)؛ ما يعني أنَّ اقتران التكلفة الحدِّية هو مشتقّة اقتران التكلفة أيْ $C'(x)$.

أمّــا الاقتــران الــذي يُمثِّل إيــراد بيــع x وحدة مــن مُنتَــج مُعيَّن فيُســمّى **اقتــران الإيراد** (revenue function)، ويُرمَز إليه بالرمز $R(x)$. وأمّا مشــتقّة اقتران الإيراد $R'(x)$ فتُسمّى **الإيراد الحدِّي** (marginal revenue)، وهو يُمثِّل مُعدَّل تغيُّر الإيراد بالنسبة إلى عدد القطع المَبيعة.

أتعلّم

يمثّل اقتــران الإيراد ناتج ضــرب عــدد القطع في سعر بيع كل منها.

بناءً على ما سبق، فإنَّ ربح بيع x قطعة من مُنتَج مُعيَّن يعطى بالاقتران الآتي:

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

حيث $P(x)$ هو **اقتران الربح** (profit function)، و**الربح الحدِّي** (marginal profit) هو مشتقّة اقتران الربح أيْ $P'(x)$.

مثال 4 : من الحياة

وجــد خبير تســويق أنَّه لبيــع x حاســوبًا من نــوع جديد، فإنَّ ســعر الحاســوب الواحــد (بالدينار) يجــب أنْ يكون: $s(x) = 1000 - x$، حيث x عدد الأجهزة المَبيعة. إذا كانت تكلفة إنتاج x من هذه الأجهزة تعطى بالاقتران: $C(x) = 3000 + 20x$، فأجد عدد الأجهزة التي يجب إنتاجها وبيعها لتحقيق أكبر ربح مُمكِن.

الخطوة 1: أجد اقتران الإيراد.

$R(x) =$ (عدد الأجهزة المَبيعة)(سعر الحاسوب الواحد) اقتران الإيراد

$= x(1000 - x)$ بالتعويض

باستعمال خاصية التوزيع $= 1000x - x^2$

إذن، اقتران الإيراد هو: $R(x) = 1000x - x^2$.

الخطوة 2: أجد اقتران الربح.

اقتران الربح $P(x) = R(x) - C(x)$

بالتعويض $= (1000x - x^2) - (3000 + 20x)$

بالتبسيط $= -x^2 + 980x - 3000$

إذن، اقتران الربح هو: $P(x) = -x^2 + 980x - 3000$.

الخطوة 3: أجد الربح الحدِّي، ثم أجد القيمة الحرجة، وأحدّد نوعها.

الربح الحدِّي $P'(x) = -2x + 980$

بمساواة المشتقّة بالصفر $-2x + 980 = 0$

بحَلِّ المعادلة لـ x $x = 490$

إذن، توجد قيمة حرجة واحدة، هي: $x = 490$.

أستعمل اختبار المشتقّة الثانية لتحديد نوع القيمة الحرجة عندما $x = 490$:

بإيجاد المشتقّة الثانية لاقتران الربح $P''(x) = -2$

بما أنَّ المشتقّة الثانية للاقتران سالبة لقِيَم x الموجبة جميعها، فإنَّه توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 490$.

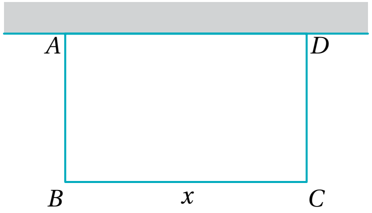
إذن، تُحقِّق الشركة أكبر ربح مُمكِن عند إنتاجها 490 جهاز حاسوب وبيعها.

أتحقّق من فهمي

وجدت خبيرة تسويق أنَّه لبيع x ثلّاجة من نوع جديد، فإنَّ سعر الثلّاجة الواحدة (بالدينار) يجب أنْ يكون: $s(x) = 1750 - 2x$، حيث x عدد الثلّاجات المَبيعة. إذا كانت تكلفة إنتاج x من هذه الثلّاجات تعطى بالاقتران: $C(x) = 2250 + 18x$، فأجد عدد الثلّاجات التي يجب إنتاجها وبيعها لتحقيق أكبر ربح مُمكِن.

أتدرّب وأحلّ المسائل

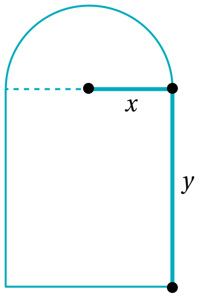
يُمثّل الشكل الآتي مخطّطًا لحديقة منزلية يراد بناؤها مقابل جدار حجري، إذا كان محيط الحديقة دون الجدار يساوي $300\ m$؛ فأُجيب عمّا يأتي:



1. أجد المقدار الجبري الذي يُمثّل طول الضلع AB بدلالة x.

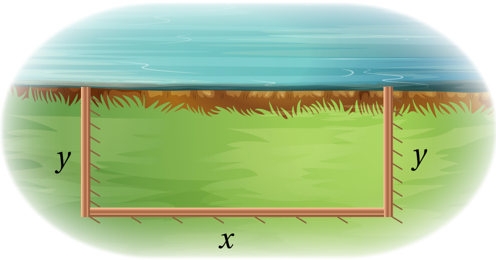
2. أجد اقتران مساحة الحديقة بدلالة x.

3. أجد أبعاد الحديقة بحيث تكون مِساحة الحديقة أكبر ما يُمكن.



4. نافذة على شكل مستطيل يعلوه نصف دائرة، محيطها $8\ m$ كما في الشكل المجاور. أجد قيمتَي x و y اللازمتين لمرور أكبر كمية من الضوء خلال النافذة.

5. خطَّط مُزارِع لتسييج حظيرة مستطيلة الشكل قرب نهر كما في الشكل التالي، وحدَّد مساحة الحظيرة بـ $245000\ m^2$؛ لتوفير كمِّية عشب كافية لأغنامه. أجد أبعاد الحظيرة التي تجعل طول السياج أقل ما يُمكِن، علمًا بأنَّ الجزء المقابل للنهر لا يحتاج إلى تسييج.



يُمثِّل الاقتران: $s(x) = 150 - 0.035x$ سعر القطعة الواحدة من مُنتَج بالدينار لإحدى الشركات، حيث x عدد القطع المُنتَجة. ويُمثِّل الاقتران: $C(x) = 16000 + 10x + 0.09x^2$ تكلفة إنتاج x قطعة بالدينار، أجد كلًّا ممّا يأتي:

6 اقتران الإيراد.

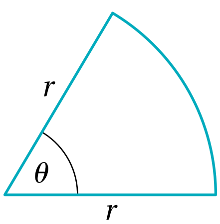
7 عدد القطع x الذي يتساوى عنده الإيراد الحدِّي مع التكلفة الحدِّية.

8 اقتران الربح.

9 عدد القطع اللازم بيعها من المُنتَج لتحقيق أكبر ربح مُمكِن، ثم أجد أكبر ربح مُمكِن.

10 سعر الوحدة الواحدة من المُنتَج الذي يُحقِّق أكبر ربح مُمكِن.

يُبيِّن الشكل المجاور قطاعًا دائريًّا محيطه 200 cm، أجد كلًّا ممّا يأتي:



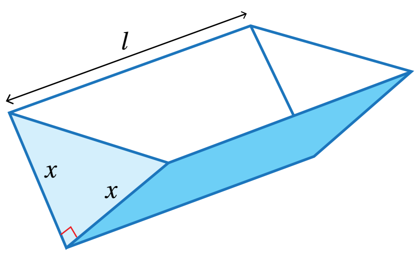
أُشاهِد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز الآتي:

11 الاقتران الذي يُمثِّل مِساحة القطاع الدائري بدلالة r.

12 أكبر مِساحة ممكنة للقطاع الدائري.

مهارات التفكير العليا

13 **تحدٍّ:** قالَب لصنع الكعك على شكل منشور ثلاثي مفتوح من الأعلى، قاعدته على شكل مثلث قائم الزاوية كما في الشكل المجاور. إذا كان حجم القالَب $864\ \text{cm}^3$، فأجد أبعاده التي تجعل المواد المُستعمَلة لصنعه أقل ما يُمكِن، مُبرِّرًا إجابتي.



الدرس 6

قاعدة السلسلة
The Chain Rule

فكرة الدرس إيجاد مشتقّات اقترانات مُختلِفة باستعمال قاعدة السلسلة.

المصطلحات قاعدة السلسلة، قاعدة سلسلة القوَّة.

مسألة اليوم يُمثِّل الاقتـران: $N(t) = 20 - \frac{30}{\sqrt{9 - t^2}}$ عدد السلع التقريبي التي يُمكِن لمُحاسِب مُبتدِئ في أحد المَحالِّ التجارية أنْ يُمرِّرها فوق الماسح الضوئي في الدقيقة الواحدة بعد t ساعة من بَدْئه العمل. أجد سرعة المُحاسِب في أداء هذه المهمة بعد زمن مقداره t ساعة.

قاعدة السلسلة

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ اقتران القوَّة هو اقتران في صورة: $f(x) = x^n$، حيث n عدد حقيقي، ومن أمثلته:

$$f(x) = x^{\frac{5}{3}} \quad , \quad f(x) = \frac{1}{x^8} \quad , \quad f(x) = x^4$$

تعلَّمْتُ أيضًا أنَّ مشتقّة اقتران القوَّة هي: $f'(x) = nx^{n-1}$، وكيف أجد مشتقّة اقترانات تتضمَّن حدودها اقترانات قوَّة، مثل: $f(x) = x^3 + 2x$.

ولكنْ، كيف يُمكِن إيجاد مشتقّة اقترانات أكثر تعقيدًا، مثل: $f(x) = (x^3 + 2x)^7$؟

أُلاحِظ أنَّ الاقتـران: $f(x) = (x^3 + 2x)^7$ هو اقتران مُركَّب، حيث: $h(x) = x^3 + 2x$، و $g(x) = x^7$ مُركَّبتا $f(x)$.

$$f(x) = \underbrace{(\overbrace{x^3 + 2x}^{\text{الداخلي}})^7}_{\text{الخارجي}}$$

لغة الرياضيات
يُسمّى $h(x)$ اقترانًا داخليًّا للاقتران المُركَّب، ويُسمّى $g(x)$ اقترانًا خارجيًّا له، حيث: $f(x) = (g \circ h)(x)$.

يُمكِن إيجاد مشتقّة الاقتران المُركَّب: $f(x) = (x^3 + 2x)^7$ بإيجاد مشتقّة الاقتران الخارجي، وإيجاد قيمتها عند الاقتران الداخلي، ثم ضربها في مشتقّة الاقتران الداخلي، في ما يُسمّى **قاعدة السلسلة** (the chain rule).

بوجه عام، يُمكِن إيجاد مشتقّة الاقتران الناتج من تركيب أيِّ اقترانين كما يأتي:

نظرية **قاعدة السلسلة**

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانيـــن، فإنَّــه يُمكِــن إيجــاد مشــتقّة الاقتــران المُركَّــب: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ باستعمال القاعدة الآتية:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$$

وبصيغة أُخرى، إذا كان: $y = f(u)$، وكان: $u = g(x)$، فإنَّ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

مثال 1

أجد مشتقّة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $y = (x^2 + 1)^3$

الخطوة 1: أجد مشتقّة الاقتران الداخلي ومشتقّة الاقتران الخارجي للاقتران المُركَّب.

الاقتران الداخلي للاقتران المُركَّب: $u = x^2 + 1$، والاقتران الخارجي له: $y = u^3$.

$$\frac{du}{dx} = 2x$$ مشتقّة الاقتران الداخلي

$$\frac{dy}{du} = 3u^2$$ مشتقّة الاقتران الخارجي

الخطوة 2: أجد مشتقّة الاقتران المُركَّب باستعمال قاعدة السلسلة.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$ قاعدة السلسلة

$$= 3u^2 \times 2x$$ بتعويض $\frac{dy}{du} = 3u^2, \frac{du}{dx} = 2x$

$$= 6x(x^2 + 1)^2$$ بتعويض $u = x^2 + 1$

2 $y = \sqrt{4-3x}$

الخطوة 1: أكتب الاقتران بالصورة الأُسِّية.

$$y = \sqrt{4-3x}$$ الاقتران المعطى

$$= (4-3x)^{\frac{1}{2}}$$ الصورة الأُسِّية

الخطوة 2: أجد مشتقّة الاقتران الداخلي ومشتقّة الاقتران الخارجي للاقتران المُركَّب.

الاقتران الداخلي للاقتران المُركَّب: $u = 4 - 3x$، والاقتران الخارجي له: $y = u^{\frac{1}{2}}$.

$$\frac{du}{dx} = -3$$ مشتقّة الاقتران الداخلي

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}$$ مشتقّة الاقتران الخارجي

الخطوة 3: أجد مشتقّة الاقتران المُركَّب باستعمال قاعدة السلسلة.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$ قاعدة السلسلة

$$= \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \times -3$$ بتعويض $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}, \frac{du}{dx} = -3$

$$= -\frac{3}{2}(4-3x)^{-\frac{1}{2}}$$ بتعويض $u = 4 - 3x$

$$= -\frac{3}{2\sqrt{4-3x}}$$ الصورة الجذرية

أتذكّر

لأيّ عدد حقيقي a، ولأيّ عددين صحيحين m و n، حيث $n > 1$:

- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

حيث $\frac{m}{n}$ في أبسط صورة، إلّا إذا كانت $a < 0$، و n عددًا زوجيًّا فإن الجذر يكون غير مُعرَّف.

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقّة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $y = (x^2 - 2)^4$

b) $y = \sqrt{x^3 + 4x}$

قاعدة سلسلة القوّة

تعرَّفْتُ في المثال السابق كيف أجد مشتقّة الاقتران المُركَّب في صورة: $f(x) = (g(x))^n$، وهو أحد أكثر الاقترانات المُركَّبة شيوعًا. والآن سأتعرَّف قاعدة عامة لإيجاد مشتقّة هذا الاقتران تُسمّى **قاعدة سلسلة القوّة** (power chain rule)، وهي حالة خاصة من قاعدة السلسلة، حيث الاقتران الخارجي f هو اقتران قوّة.

مفهوم أساسي

قاعدة سلسلة القوَّة

إذا كان n أيَّ عدد حقيقي، وكان $g(x)$ اقترانًا، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}(g(x))^n = n(g(x))^{n-1} \times g'(x)$$

يُمكِن إيجاد مشتقّة الاقتران المُركَّب في صورة: $f(x) = (g(x))^n$ عند نقطة ما كما في المثال الآتي:

مثال 2

أجد مشتقّة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

1) $f(x) = (2x^4 - x)^3 , x = 1$

$f(x) = (2x^4 - x)^3$ الاقتران المعطى

$f'(x) = 3(2x^4 - x)^2 \times \frac{d}{dx}(2x^4 - x)$ قاعدة سلسلة القوَّة

$= 3(2x^4 - x)^2 \times (8x^3 - 1)$ باشتقاق $2x^4 - x$

$f'(1) = 21$ بتعويض $x = 1$

2) $f(x) = \sqrt{1 + x^3} , x = 2$

$f(x) = \sqrt{1 + x^3} = (1 + x^3)^{\frac{1}{2}}$ الصورة الأُسِّية

$f'(x) = \frac{1}{2}(1 + x^3)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{d}{dx}(1 + x^3)$ قاعدة سلسلة القوَّة

$= \frac{1}{2}(1 + x^3)^{-\frac{1}{2}} \times (3x^2)$ باشتقاق $1 + x^3$

$= \frac{3x^2}{2\sqrt{1 + x^3}}$ الصورة الجذرية

$f'(2) = 2$ بتعويض $x = 2$

أتعلَّم

إذا كان $g(x)$ اقترانًا، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{g(x)} = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

3 $y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}\ ,\ x = -2$

الصورة الأُسِّية	$y = (x^2-1)^{\frac{2}{3}}$
قاعدة سلسلة القوَّة	$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}} \times \frac{d}{dx}(x^2-1)$
باشتقاق $x^2 - 1$	$= \frac{2}{3}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}} \times 2x$
الصورة الجذرية	$= \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$
بتعويض $x = -2$	$\left.\frac{dy}{dx}\right\vert_{x=-2} = \frac{-8}{3\sqrt[3]{3}}$

رموز رياضية

يُستعمَل الرمز $\left.\frac{dy}{dx}\right\vert_{x=a}$ للدلالة على قيمة المشتقّة عندما $x = a$.

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقّة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

a) $f(x) = (x^4+1)^5\ ,\ x = 1$

b) $f(x) = \sqrt{x^2+3x+6}\ ,\ x = 2$

c) $y = \sqrt[4]{(2x^2-7)^5}\ ,\ x = 4$

قواعد الاشتقاق الأساسية، وقاعدة السلسلة

لإيجاد مشتقّة اقتران في بعض الحالات، يتعيَّن تطبيق قواعد الاشتقاق الأساسية التي تعلَّمْتُها سـابقًا، مثل: مشتقّة المجموع، ومشتقّة الفرق، ومشتقّة مضاعفات الاقتران، إضافةً إلى تطبيق قاعدة السلسلة.

مراجعة المفهوم — مشتقّة المجموع، ومشتقّة الفرق، ومشتقّة مضاعفات الاقتران

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين، وكان a عددًا حقيقيًّا، فإنَّ مشـتقّة كلٍّ من $f(x) + g(x)$، و $f(x) - g(x)$، و $af(x)$ هي:

- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$ — مشتقّة المجموع، أو مشتقّة الفرق
- $(af)'(x) = af'(x)$ — مشتقّة مضاعفات الاقتران

مثال 3

أجد مشتقّة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = 5(1 - x^2)^3 + 4x + 7$

الاقتران المعطى	$f(x) = 5(1 - x^2)^3 + 4x + 7$
قواعد سلسلة القوّة، ومضاعفات الاقتران، والمجموع، والثابت	$f'(x) = 15(1 - x^2)^2 \times \frac{d}{dx}(1 - x^2) + 4$
باشتقاق $1 - x^2$	$= 15(1 - x^2)^2 \times -2x + 4$
بالتبسيط	$= -30x(1 - x^2)^2 + 4$

2 $f(x) = (2x + 1)^3 - \sqrt{3x^2 - 2x}$

الاقتران المعطى	$f(x) = (2x + 1)^3 - \sqrt{3x^2 - 2x}$
قاعدتا سلسلة القوَّة، ومشتقّة الفرق	$f'(x) = 3(2x + 1)^2 \times \frac{d}{dx}(2x + 1) - \frac{6x - 2}{2\sqrt{3x^2 - 2x}}$
باشتقاق $2x + 1$	$= 3(2x + 1)^2 \times 2 - \frac{6x - 2}{2\sqrt{3x^2 - 2x}}$
بالتبسيط	$= 6(2x + 1)^2 - \frac{3x - 1}{\sqrt{3x^2 - 2x}}$

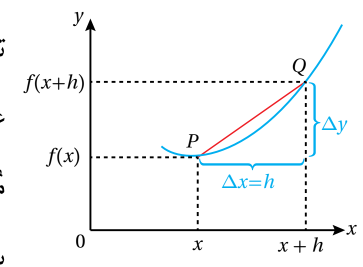
أتحقّق من فهمي

أجد مشتقّة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = (1 + x^3)^4 + x^8 + 2$

b) $f(x) = \sqrt[3]{2x - 1} - (x - 3)^3$

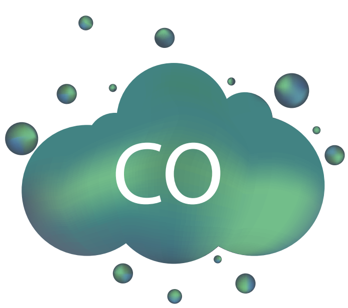
مُعدَّل التغيُّر



تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ المشتقّة هي نهاية ميل قاطع المنحنى بين النقطتين: $(x, f(x)), (x+h, f(x+h))$ عندما $h \to 0$. وبما أنَّ ميل القاطع هو مُعدَّل تغيُّر قيمة y بالنسبة إلى قيمة x، فإنَّ المشتقّة هي مُعدَّل تغيُّر أيضًا، ولكنْ عند لحظة (نقطة) مُعيَّنة. فمثلًا: إذا كان المطلوب هو إيجاد $\frac{dy}{dx}$، فهذا يعني إيجاد مُعدَّل تغيُّر y بالنسبة إلى x.

تتطلَّب كثير من المواقف الحياتية إيجاد مُعدَّل تغيُّر كمِّية ما بالنسبة إلى كمِّية أُخرى عند لحظة مُعيَّنة، مثل إيجاد مُعدَّل تغيُّر كمِّية أوَّل أكسيد الكربون في الجو بالنسبة إلى عدد السكّان.

مثال 4 : من الحياة



تلوُّث: توصَّلت دراسة بيئية إلى نمذجة مُتوسِّط المستوى اليومي لغاز أوَّل أكسيد الكربون في الهواء بإحدى القرى عن طريق الاقتران: $C(p) = 0.6\sqrt{0.5p^2 + 17}$، حيث p عدد السكّان بالألف نسمة، علمًا بأنَّ C يقاس بأجزاء من المليون (مثلًا: $C = 5$ تعني 5 أجزاء من المليون):

معلومة

أوَّل أكسيد الكربون هو غاز عديم اللون والرائحة، وضارٌّ بالإنسان؛ إذ يؤدي استنشاقه إلى منع الدم من حمل الأكسجين، وعدم استعمال الأنسجة للأكسجين بصورة فاعلة.

1 أجد مُعدَّل تغيُّر مُتوسِّط المستوى اليومي لغاز أوَّل أكسيد الكربون في الهواء بالنسبة إلى عدد السكّان.

أجد $C'(p)$:

$$C(p) = 0.6\sqrt{0.5p^2 + 17}$$ الاقتران المعطى

$$C'(p) = \frac{0.6\,p}{2\sqrt{0.5p^2 + 17}}$$ قاعدة السلسلة

إذن، مُعدَّل تغيُّر مُتوسِّط المستوى اليومي لغاز أوَّل أكسيد الكربون في الهواء بالنسبة إلى عدد السكّان هو: $C'(p) = \frac{0.6\,p}{2\sqrt{0.5p^2 + 17}}$.

2 **أجد مُعدَّل تغيُّر مُتوسِّط المستوى اليومي لغاز أوَّل أكسيد الكربون في الهواء بالنسبة إلى عدد السكّان عندما يكون عدد السكّان 4 آلاف نسمة، وأفسّر معنى الناتج.**

أجد $C'(4)$:

$$C'(p) = \frac{0.6\,p}{2\sqrt{0.5p^2 + 17}}$$ مشتقّة $C(t)$

$$C'(4) = \frac{0.6\,(4)}{2\sqrt{0.5(4)^2 + 17}}$$ بتعويض $p = 4$

$$= 0.24$$ بالتبسيط

إذن، إذا كان عدد السكّان 4 آلاف نسمة، فإنَّ مُتوسِّط المستوى اليومي لغاز أوَّل أكسيد الكربون يزداد بمقدار 0.24 جزء من المليون لكل ألف نسمة.

أتعلّم

تشير الإشارة الموجبة إلى ازدياد مُتوسِّط المستوى اليومي لغاز أوَّل أكسيد الكربون.

أتحقّق من فهمي

صناعة: **يُمثِّل الاقتران: $P(t) = \sqrt{10t^2 + t + 229}$ إجمالي الأرباح السنوية لإحدى الشركات الصناعية (بآلاف الدنانير)، حيث t عدد السنوات بعد عام 2015م:**

a) أجد مُعدَّل تغيُّر إجمالي الأرباح السنوي للشركة بالنسبة إلى الزمن t.

b) أجد مُعدَّل تغيُّر إجمالي الأرباح السنوي للشركة عام 2020م، وأفسّر معنى الناتج.

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد مشتقّة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = (1 + 2x)^4$

2) $f(x) = (3-2x^2)^{-5}$

3) $f(x) = (x^2 - 7x + 1)^{\frac{3}{2}}$

4) $f(x) = \sqrt{7 - x}$

5) $f(x) = 4(2 + 8x)^4$

6) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4x - 8}}$

7) $f(x) = \sqrt{5 + 3x^3}$

8) $f(x) = \sqrt{x} + (x - 3)^2$

9) $f(x) = \sqrt[3]{2x - x^5} + (4 - x)^2$

10) $f(x) = (\sqrt{x} + 5)^4$

11) $f(x) = \sqrt{(2x-5)^3}$

12) $f(x) = (2x^3 - 3x^2 + 4x + 1)^5$

أجد مشتقّة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

13) $f(x) = \frac{1}{(4x+1)^2}, x = \frac{1}{4}$

14) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}, x = 3$

أستعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

15) $y = 5u^2 + 3u, u = x^3 + 1$

16) $y = \sqrt[3]{2u+5}, u = x^2 - x$

أستعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

17) $y = 3u^2 - 5u + 2, u = x^2 - 1, x = 2$

18) $y = (1 + u^2)^3, u = 2x - 1, x = 1$

صناعة: يُمثِّل الاقتران: $C(x) = 1000\sqrt{x^2 - 0.1x}$ تكلفة إنتاج x قطعة من مُنتَج مُعيَّن (بآلاف الدنانير):

19) أجد مُعدَّل تغيُّر تكلفة الإنتاج بالنسبة إلى عدد القطع المُنتَجة.

20) أجد مُعدَّل تغيُّر تكلفة الإنتاج بالنسبة إلى عدد القطع المُنتَجة عندما يكون عدد القطع المُنتَجة 20 قطعة.

علوم: يُمثِّل الاقتران: $N(t) = 400\left(1 - \frac{3}{(t^2+2)^2}\right)$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t يومًا في مجتمع بكتيري:

21) أجد مُعدَّل تغيُّر N بالنسبة إلى t عندما $t = 1$.

22) أجد مُعدَّل تغيُّر N بالنسبة إلى t عندما $t = 4$.

إذا كان: $g(2) = -3, g'(2) = 6, h(3) = 2, h'(3) = -2$ ، فأجد مشتقّة كل اقتران ممّا يأتي عندما $x = 3$:

23) $f(x) = g(h(x))$

24) $f(x) = (h(x))^3$

إذا كان $y = \sqrt{2x+5}$؛ فأُجيب عمّا يأتي:

25 أُثبتُ أنّ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$

26 أجد النقطة التي يقطع عندها مماس الاقتران عند النقطة $(2, 3)$ المحور x.

إذا كان $y = \frac{600}{x^2+50}$؛ فأُجيب عمّا يأتي:

27 أجد $\frac{dy}{dx}$.

28 أجد معادلة المماس عند النقطة $(10, 4)$.

مهارات التفكير العليا

29 **تبرير:** إذا كان: $h(x) = f(g(x))$، حيث: $f(u) = u^2 - 1$، وكان: $g(2) = 3, g'(2) = -1$، فأجد $h'(2)$، وأبرّر إجابتي.

30 **تبرير:** أجد مشتقّة الاقتران: $y = (x^2 - 4)^5$ عندما $y = 0$، وأبرّر إجابتي.

31 **أكتشف المُختلِف:** أيُّ الاقترانات الآتية مُختلِف؟ أبرّر إجابتي.

$p(x) = x^2 + 1$ | $g(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$ | $h(x) = (x^2+1)^3$ | $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

32 **تحدٍّ:** أجد مشتقّة الاقتران: $f(x) = \sqrt[3]{2x + (x^2 + x)^4}$.

33 **تحدٍّ:** أُثبتُ أنّ مماس منحنى الاقتران $y = (x^2 + x - 2)^3 + 3$ عند النقطة $(1, 3)$، هو أيضًا مماس للمنحنى عند نقطة أُخرى.

أختار رمز الإجابة الصحيحة، لكل ممّا يأتي:

1 إذا كان $y = 2x^4 - 5x^3 + 2$؛ فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

a) $y' = 8x^3 - 5x^2 + 2$

b) $y' = 4x^4 - 15x^2 + 2$

c) $y' = 8x^3 - 15x + 2$

d) $y' = 8x^3 - 15x^2$

2 إذا كان $y = \frac{2x^4 + 9x^2}{3x}$؛ فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

a) $\frac{2x^4}{3} + 6x$ b) $2x^2 + 3$

c) $2x + 3$ d) $8x^3 + 18x$

3 إذا كان $f(x) = 12x^{\frac{2}{3}}$؛ فإنّ $f'(x)$ تساوي:

a) $\frac{4}{3}x^{\frac{-1}{3}}$ b) $8x^{\frac{-1}{3}}$

c) $\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$ d) $4x^{\frac{-1}{3}}$

4 إذا كان $f(x) = (1-x)^3$؛ فإنّ $f''(x)$ تساوي:

a) $-3(1-x)^2$ b) $3(1-x)^2$

c) $6(1-x)$ d) $-3(1-x)$

5 يوجد للاقتران $y = 4x^2 + 6x + 3$ قيمة حرجة عندما x تساوي:

a) $\frac{-3}{4}$ b) $\frac{3}{5}$

c) $\frac{-3}{2}$ d) $\frac{-4}{3}$

6 يوجد للاقتران $y = -5x^2 + 7x + 4$ قيمة عظمى محلّية عندما x تساوي:

a) 0.7 b) 1

c) 0 d) −0.7

يُمثّل الاقتران: $s(t) = 2 + 7t - t^2, t \geq 0$ موقع جسم يتحرّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

7 اللحظة التي تكون فيها حركة الجسم في الاتجاه السالب هي:

a) $t = 1$ b) $t = 2$

c) $t = 3.5$ d) $t = 4$

8 اللحظة التي يكون فيها الجسم في حالة سكون لحظي هي:

a) $t = 1$ b) $t = 2$

c) $t = 3.5$ d) $t = 4$

أجد كلّ نهاية ممّا يأتي:

9 $\lim_{x \to -4} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x - 4}$

10 $\lim_{x \to -4} \frac{|x - 4|}{x - 4}$

11 $\lim_{x \to 1} \frac{x^4 + x^2 - 6}{x^4 + 2x + 3}$

12 $\lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{x+2} - 3}{x - 7}$

أُحدّد إذا كان كلّ اقتران ممّا يأتي متّصلًا عند قيمة x المعطاة، وأبرّر إجابتي:

13 $f(x) = 3x - 2 , \ x = 5$

14 $g(x) = \frac{1}{x} , \ x = 0$

15 $h(x) = \begin{cases} 3x + 4 & , x < 3 \\ 2x - 1 & , x \geq 3 \end{cases} , \ x = 3$

إذا كان الاقتران $y = 2x + \frac{8}{x}$؛ فأجد كلًّا ممّا يأتي:

16 $\frac{dy}{dx}$.

17 ميل مماس المنحنى عند نقاط تقاطعه مع المستقيم $y = 10$.

18 إذا كان الاقتران $y = (3x + a)(x - 1)$، حيث a ثابت؛ فأجد بدلالة a إحداثيّات النقطة التي تكون عندها مشتقّة الاقتران تساوي a.

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 6t^2 + 12t, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

19 ما سرعة الجسم عندما $t = 2$؟

20 في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 2$؟

21 ما تسارع الجسم عندما $t = 2$؟

22 أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

23 أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 + 3$، التي يكون عندها ميل المماس هو 12

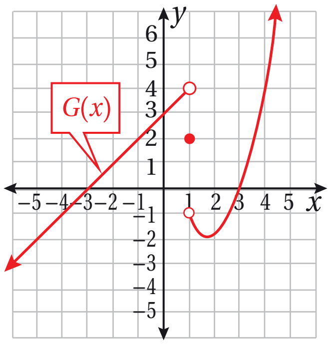
أستعمل اختبار المشتقّة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي:

24 $f(x) = 9 + 24x - 2x^3$

25 $f(x) = (3x - 2)^3 - 9x$

26 $f(x) = 4x^5 - 10x^2$

أستعملُ التمثيل البياني لأجد كلّ نهاية ممّا يأتي:



27 $\lim_{x \to 1} G(x)$

28 $\lim_{x \to -2} G(x)$

29 $\lim_{x \to -3} G(x)$

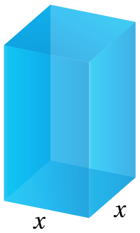
30 إذا كان الضغط والحجم لغاز مُعيّن يرتبطان بالعلاقة: $pV = 1200$، حيث p الضغط وV الحجم، ويزداد الضغط مع الزمن (t) بالثواني وفقًا للعلاقة $p = 10 + 0.4\sqrt{t}$. فأجد معدّل تغيّر حجم الغاز بالنسبة إلى t عندما $t = 100$

أجد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية (إن وجدت) لكل اقتران ممّا يأتي:

31 $g(x) = 3x^2 - 12x + 4$

32 $h(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

33 صندوق على شكل متوازي مستطيلات، قاعدته مربّعة الشكل طول ضلعها x cm كما في الشكل المجاور.



إذا كان مجموع أطوال أحرف الصندوق يساوي 144 cm؛ فأجد قيمة x التي تجعل حجم الصندوق أكبر ما يمكن.

ملحقات

رموز رياضية

دينار أردني	JD
متر	m
كيلومتر	km
سنتيمتر	cm
كيلوغرام	kg
غرام	g
ثانية	s
دقيقة	min
ساعة	h
إنش	in
قدم	ft
مشتقة الاقتران $f(x)$	$f'(x)$
المستقيم المارُّ بالنقطتين A و B	$\overleftrightarrow{AB}$
القطعة المستقيمة التي نقطتا نهايتيها A و B	$\overline{AB}$
الشعاع الذي نقطة بدايته A، ويمرُّ بالنقطة B	$\overrightarrow{AB}$
طول القطعة المستقيمة $\overline{AB}$	AB
الزاوية A	$\angle A$
زاوية ضلعاها $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$	$\angle ABC$
قياس الزاوية A	$m\angle A$
المثلث ABC	$\triangle ABC$
موازٍ لـ	$\parallel$
عمودي على	$\perp$
نسبة a إلى b	$a:b$

الجبر

العمليات الحسابية

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \qquad a(b+c)=ab+ac$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc} \qquad \frac{a+c}{b}=\frac{a}{b}+\frac{c}{b}$$

الأسس والجذور

$$\frac{x^m}{x^n}=x^{m-n} \qquad x^m x^n = x^{m+n}$$

$$x^{-n}=\frac{1}{x^n} \qquad (x^m)^n = x^{mn}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n=\frac{x^n}{y^n} \qquad (xy)^n = x^n y^n$$

$$x^{m/n}=\sqrt[n]{x^m}=(\sqrt[n]{x})^m \qquad x^{1/n}=\sqrt[n]{x}$$

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \qquad \sqrt[n]{xy}=\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$$

حالات خاصة من تحليل كثيرات الحدود

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

القانون العام

إذا كان: $ax^2+bx+c=0$، فإنَّ:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

التفاضل

قواعد أساسية للاشتقاق

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = f'(x) - g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

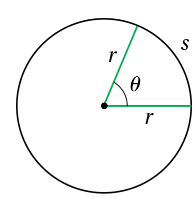
$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))\, g'(x)$$

المثلثات

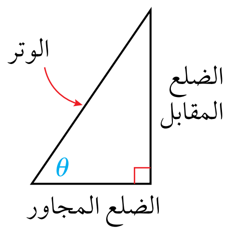
قياسات الزوايا

$$\pi = 180^\circ \qquad 1^\circ = \frac{\pi}{180}\text{ rad}$$

$$1\text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$$



الاقترانات المثلثية في المثلث القائم الزاوية

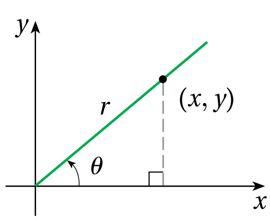


$$\sin\theta = \frac{(\text{المقابل})}{(\text{الوتر})} \qquad \csc\theta = \frac{(\text{الوتر})}{(\text{المقابل})}$$

$$\cos\theta = \frac{(\text{المجاور})}{(\text{الوتر})} \qquad \sec\theta = \frac{(\text{الوتر})}{(\text{المجاور})}$$

$$\tan\theta = \frac{(\text{المقابل})}{(\text{المجاور})} \qquad \cot\theta = \frac{(\text{المجاور})}{(\text{المقابل})}$$

الاقترانات المثلثية لأيِّ زاوية



$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y}$$

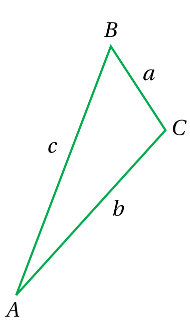
$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

قانون الجيوب

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

قانون جيوب التمام



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

قِيَم بعض الاقترانات المثلثية للزوايا الخاصة

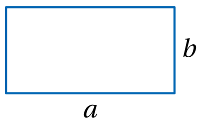
$\theta°$	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
θ rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0

الهندسة

صيغ هندسية (المساحة A، والمحيط C، والحجم V)

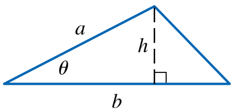
- المستطيل:

$A = ab$



- المثلث:

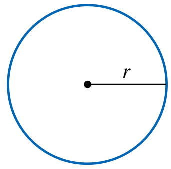
$$A = \frac{1}{2}bh$$
$$= \frac{1}{2}ab\sin\theta$$



- الدائرة:

$A = \pi r^2$

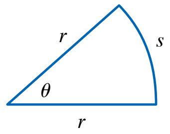
$C = 2\pi r$



- القطاع الدائري:

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta$$

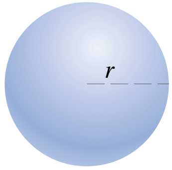
$s = r\theta$ (θ radian)



- الكرة:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

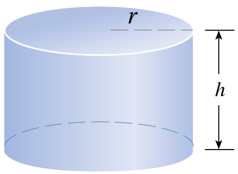
$A = 4\pi r^2$



- الأسطوانة:

$V = \pi r^2 h$

$A = 2\pi rh + 2\pi r^2$



- متوازي المستطيلات:

$V = abc$

$A = 2ab + 2ac + 2bc$